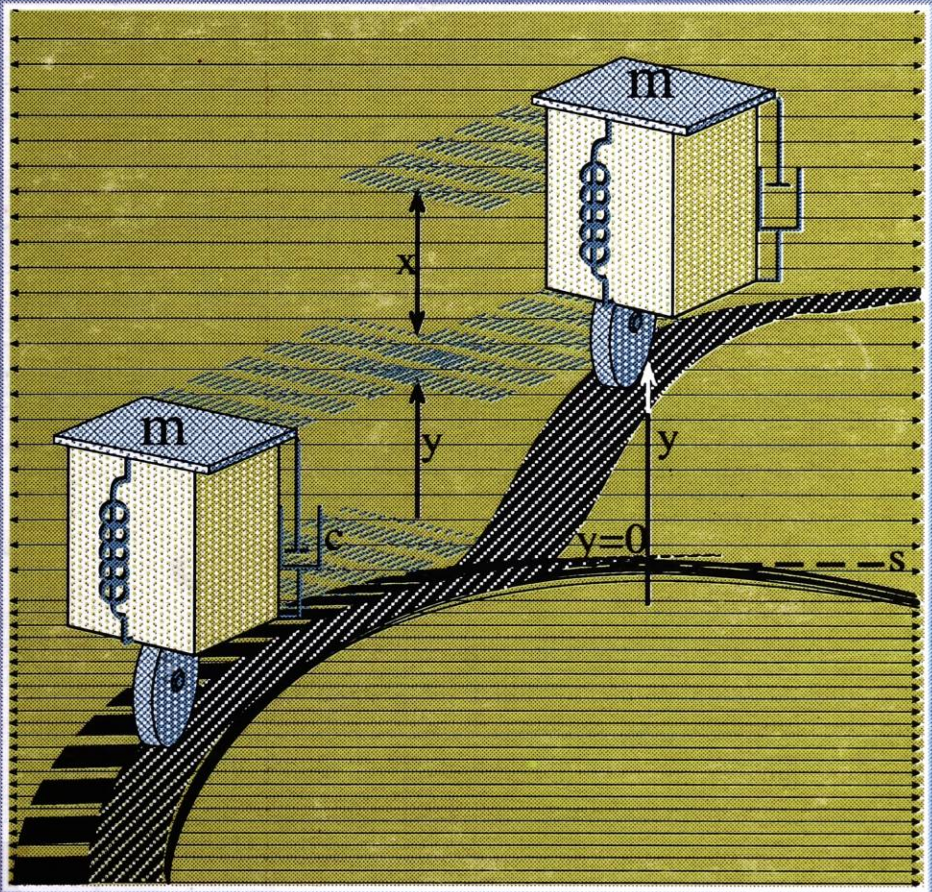
SEÑALES Y SISTEMAS LINEALES



Carlos Daniel Prado Pérez

Básicas

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

SEÑALES Y SISTEMAS LINEALES

SEÑALES
Y SISTEMAS
LINEALES

Este material fue dictaminado y aprobado por el Consejo Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería el dia 22 de octubre 2003

SEÑALES Y SISTEMAS LINEALES

Carlos Daniel Prado Pérez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

ISBN: 970-31-0258-1

Revisión de texto científico
Ma. Dolores Cárdenas Valdés
Cuidado de la edición y formación
Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada:
Consuelo Quiróz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222/9223
Fax. 5318-9222

1a. edición, 2004

Impreso en México.

TABLA DE CONTENIDO

PRESENTACION

Este trabajo persigue dos objetivos principales:

a) Dar la parte matemática básica para quienes se hallan estudiando Ingeniería Eléctrica, Mecánica, Electrónica o de Control.

b)Proponer al matemático temas que pudieran llevarlo a investigaciones interdisciplinarias.

Cabe hacer notar que, por la naturaleza misma de este trabajo, los dos objetivos anteriores se cubren de manera general. Si el lector quiere profundizar en algún tema podrá ir a las referencias recomendadas.

Muchos resultados se presentan sin el rigor que un matemático exigiría, pero he preferido sacrificar el rigor matemático para dar espacio a las aplicaciones de los conceptos presentados.

Dicho lo anterior espero que este trabajo resulte de interés y utilidad.

1. Sistemas Lineales

1.1 Introducción

La finalidad del presente trabajo es tratar con las principales herramientas matemáticas utilizadas en el análisis de sistemas lineales. Pocos sistemas encontrados en la práctica son exactamente lineales, sin embargo, su estudio es importante al menos por las siguientes dos razones:

a) El conocimiento de sistemas lineales es un prerrequisito esencial para entender sistemas no lineales.
b) En muchos casos un análisis de un modelo lineal el cual aproxima al sistema es muy adecuada.

Los sistemas que se encuentran frecuentemente involucran cantidades físicas tales como voltaje, corriente, desplazamiento, velocidad, etc. Aunque el rango de aplicaciones de la teoría de sistemas abarca áreas tan diversas como la matemática, ingeniería, economía, sociología entre otras, llevaremos nuestra atención primordialmente al campo de la ingeniería.

1.2 Definiciones y Clasificación de Sistemas

Sistema. Un sistema es una combinación de componentes que actúan conjuntamente y cumplen determinado objetivo. Un sistema no está limitado a objetivos físicos. El concepto de sistema puede aplicarse a fenómenos dinámicos abstractos, como los que se encuentran en economía. Por lo tanto, el término sistema hay que interpretarlo como referido a sistemas físicos, biológicos, económicos y otros. Para los sistemas existe un conjunto especificado de variables llamadas entradas, o excitaciones y otro conjunto llamado salidas, o respuestas.

Representaremos esquemáticamente un sistema como una caja con entradas: $x_1(t)$, $x_2(t)$,..., $x_n(t)$ y salidas $y_1(t)$, $y_2(t)$,..., $y_m(t)$ como se muestra en la siguiente figura:

Figura 1

Las entradas x_i *(t)*, *i= 1,2,...,n* y las salidas y_j *(t)*, *j= 1,2,...,m* serán, en general, señales de tiempo; es decir, cualquier variable física que varíe con el tiempo.

<u>Sistema Lineal</u>. Matemáticamente, podemos expresar la relación entre la excitación $x = x(t)$ y la respuesta $y = y(t)$ por

$$y = H(x)$$

donde el símbolo H sirve para identificar el sistema teniendo respuesta *"y"* a una excitación *"x"*. Así H es un <u>operador</u> que especifica el efecto del sistema sobre "*x*" para producir *"y"*.

Un sistema se dice <u>lineal</u> si H es un operador lineal, explícitamente, si se cumple:

a) $H(x) = y$ implica $H(a\,x) = a\,y$, a constante (esta propiedad se llama <u>homogeneidad</u>)

b) $H(x_1) = y_1$ y $H(x_2) = y_2$ implica: $H(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$ (propiedad de <u>superposición</u>)

Se pueden combinar (a) y (b) en una sola ecuación. Un sistema es lineal si y sólo si:

$H(a\,x_1 + b\,x_2) = a\,H(x_1) + b\,H(x_2)$, donde a y b son constantes.

<u>Sistemas Invariables y Variables en el Tiempo</u>. Un sistema se dice invariable en el tiempo, si

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad \text{implica} \quad x(t-T) \rightarrow y(t-T)$$

para cualesquiera valores de t y T. Aquí $x(t) \rightarrow y(t)$ significa $H(x(t)) = y(t)$.

La condición anterior expresa que la respuesta del sistema es independiente del tiempo y que sólo depende de la forma de la señal de entrada $x(t)$. Los sistemas invariables en el tiempo llevan en su modelación a ecuaciones diferenciales ó de diferencia con coeficientes constantes, los variables en el tiempo llevan a ecuaciones diferenciales ó de diferencia con coeficientes que varían en el tiempo.

Sistemas de Parámetros Concentrados y Distribuidos

Un sistema físico es un conjunto de elementos interconectados. Cuando se aplica una señal $x(t)$ a la entrada de un sistema, dicha señal aparece prácticamente en forma simultánea en cada uno de los elementos del sistema o se requiere cierto tiempo de propagación para que la señal afecte a diferentes elementos dentro del sistema. Si el impulso de entrada se propaga instantáneamente a través del sistema, el sistema se llama de parámetros concentrados. Estos sistemas se modelan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. En sistemas eléctricos, este hecho significa que la longitud de onda del estímulo es grande comparada con las dimensiones de los elementos.

Los sistemas de parámetros distribuidos se pueden modelar empleando ecuaciones diferenciales parciales. En estos sistemas, el estímulo de entrada tarda cierto tiempo en excitar los elementos, dependiendo dicho tiempo de la velocidad con que se propaga el estímulo a través del sistema. Un sistema químico que incluya la difusión de un material dentro de otro, es un ejemplo de sistemas de parámetros distribuidos.

Sistemas Determinísticos y no Determinísticos. Un sistema no determinístico se presenta cuando existen parámetros del sistema con valores desconocidos o inciertos. Generalmente tales casos se tratan en forma probabilística. Por ejemplo, cuando se modela la comunicación a través de la atmósfera, los disturbios o ruidos introducidos en la señal se especifican estadísticamente. Un sistema es determinístico si la respuesta a la entrada es predecible o repetible.

Sistemas de Tiempo Continuo y de Tiempo Discreto

En un sistema de tiempo continuo, todas las variables son función de un tiempo continuo $t \in I \subset R$. Un sistema de tiempo discreto abarca una o más variables que son conocidas sólo en instantes discretos de tiempo $t \in I \subset Z$.

Sistemas con y sin memoria. Si la salida para cualquier tiempo t depende sólo de la entrada en el mismo tiempo, el sistema se llama sin memoria. Si la salida en el tiempo "t" depende de los valores de entrada correspondientes a cierto intervalo $(t - T, t)$, entonces el sistema tiene memoria de longitud "T". Por ejemplo, un sistema formado por un capacitor con la entrada definida como corriente y la salida definida como voltaje, tiene memoria de duración infinita, ya que

$$v(t) = (1/c) \int_{-\infty}^{t} i(u)\, du$$

La ecuación anterior indica que la salida depende de la entrada en todo el intervalo $(-\infty, t)$. La clasificación de sistemas que hemos hecho es importante porque permite especificar las técnicas que pueden emplearse para cierto tipo de sistemas. En este trabajo se trata principalmente lo relativo a modelos para sistemas determinísticos, invariables en el tiempo, de parámetros concentrados y lineales.

1.3 Modelos Para Sistemas Físicos

A continuación se presentan algunos ejemplos que muestran el uso de modelos lineales para la descripción de sistemas físicos.

Ejemplo 1 Líneas de Transmisión

Una línea de transmisión es un arreglo de conductores eléctricos que transporta ondas electromagnéticas. Aunque esta definición podría ser aplicada a la mayoría de los cables eléctricos, es generalmente restringida para cables usados en el transporte de ondas electromagnéticas de alta frecuencia. Existen diferentes tipos de líneas de transmisión. Uno de los más familiares es el cable coaxial usado en la recepción de la señal que llega a nuestros televisores. Cuando conducimos una onda de alta frecuencia por un cable ocurren varios efectos importantes, los cuales no interesan demasiado al trabajar con una onda de baja frecuencia. Éstas son:

a) La capacitancia, C, entre los dos conductores,
b) La inductancia, L, de los dos conductores,
c) La corriente que escapa a través de la capa de aislante que separa los dos conductores.

Los parámetros eléctricos de un cable coaxial están igualmente espaciados a lo largo de su longitud. Esto es verdadero para líneas de transmisión en general y también es usual considerarlo al especificar valores para los parámetros por unidad de longitud. La forma más sencilla de construir un modelo matemático de una línea de transmisión es tomar componentes extendidas a lo largo de una distancia ΔZ y entonces hacer que ΔZ tienda a cero. La pérdida entre los dos conductores es convencionalmente modelada por una conductancia, *G*, esto simplifica las matemáticas y evita confusión con la resistencia de la línea, *R*. Note que *C, G, L* y *R* son, por unidad de longitud, valores para la línea de transmisión.

Para la mayoría de las líneas de transmisión, la señal conducida varía senosoidalmente con el tiempo. Por lo tanto, el voltaje y la corriente dependen de la posición a lo largo de la línea, *Z*, y del tiempo *t*. Sin embargo, para simplificar el análisis, es común no considerar la dependencia del tiempo en las expresiones del voltaje y la corriente. Debe recordarse que cualquier variación en el voltaje y corriente con la posición tiene sobrepuesta una variación senosoidal con el tiempo. Por lo tanto, ignorando la dependencia del tiempo escribimos el voltaje como *V* y la corriente como *i*, sabiendo que son funciones de *Z*.

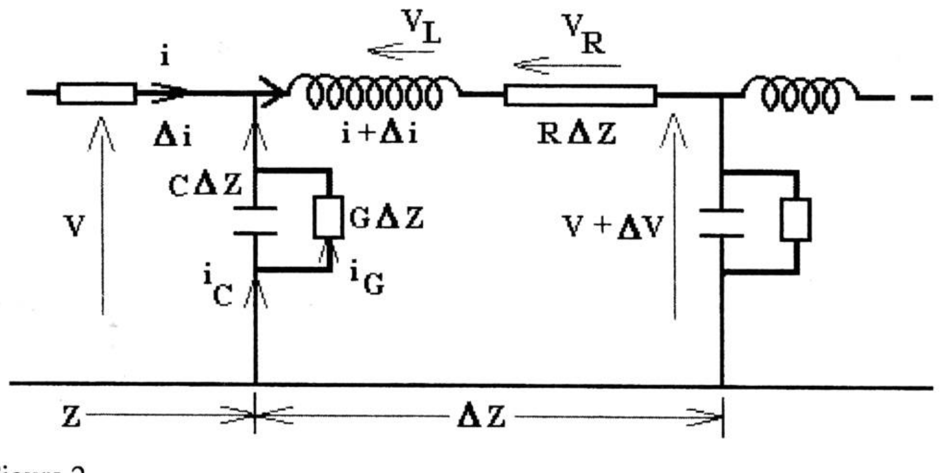


Figura 2

Consideremos el circuito de la Figura 2 el cual representa una sección de una línea de transmisión de longitud ΔZ. Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito obtenemos:

$$V + \Delta V - V + V_L + V_R = 0$$
$$\Delta V = -V_L - V_R$$

donde V_L es el voltaje que cruza al inductor y V_R la caída de voltaje en el resistor. Usando las leyes en las componentes individuales para el inductor y el resistor encontramos:

$$\Delta V = -\, i\, j\, \omega L\, \Delta Z - i\, R\, \Delta Z$$
$$= -\, i\, (R + j\, \omega L)\, \Delta Z, \qquad \text{donde } j^2 = -1$$

Nótese que Δi ha sido ignorado por ser pequeño comparado con i. Ahora consideremos la combinación paralela del capacitor y resistor (con unidades de conductancia). Aplicando la ley de corriente de Kirchhoff para esta combinación obtenemos:

$$\Delta i = i_C + i_G$$

donde i_C es la corriente a lo largo del capacitor e i_G es la corriente a lo largo del resistor. Usando las leyes en las componentes individuales para el capacitor y resistor obtenemos:

$$\Delta i = -\, V\, j\, \omega C\, \Delta Z - V\, G\, \Delta Z$$
$$= -\, V\, (G + j\, \omega C)\, \Delta Z$$

Dividiendo estas dos ecuaciones por ΔZ hallamos:

$$\Delta V / \Delta Z = -\, i\, (R + j\, \omega L)$$
$$\Delta i / \Delta Z = -\, V\, (G + j\, \omega C)$$

Bajo la consideración hecha acerca de los parámetros igualmente distribuidos, hacemos que ΔZ tienda a cero. En el límite las dos ecuaciones se convierten en:

$$dV / dZ = -\, i\, (R + j\, \omega L) \qquad (1)$$
$$di / dZ = -\, V\, (G + j\, \omega C) \qquad (2)$$

Diferenciando la ecuación (1) hallamos:

$$d^2 V / d Z^2 = -(R + j\, \omega L)\, di / dZ$$

si sustituimos en esta última di / dZ de la ecuación (2), encontramos:

$$d^2 V / d Z^2 = (R + j\, \omega L)(G + j\, \omega C) V \qquad (3)$$

Es usual escribir (3) como

$$d^2 V / d Z^2 = \gamma^2 V \qquad donde\ \gamma^2 = (R + j\,\omega L)(G + j\,\omega C) \qquad (4)$$

Esta es la ecuación diferencial que describe la variación del voltaje, V, con la posición, Z, a lo largo de la línea de transmisión. La ecuación auxiliar de esta ecuación es:

$$r^2 - \gamma^2 = 0,$$

cuyas raíces son $\pm\gamma$. Así la solución de la ecuación diferencial queda:

$$V = V_1 e^{-\gamma Z} + V_2 e^{\gamma Z} \qquad (5)$$

donde V_1 y V_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales para la línea de transmisión. Es útil escribir $\gamma = \alpha + \beta j$ que se obtiene al separar las partes real e imaginaria de γ. La ecuación (5) puede escribirse como:

$$V = V_1 e^{-\alpha Z} e^{-j\beta Z} + V_2 e^{\alpha Z} e^{j\beta Z}$$

La cantidad $V_1 e^{-\alpha Z} e^{-j\beta Z}$ representa el avance de la onda sobre la línea de transmisión. Consiste de un decaimiento exponencial multiplicado por un término senosoidal. El decaimiento exponencial representa una gradual atenuación de la onda causada por pérdidas en su viaje a lo largo de la línea de transmisión. La cantidad $V_2\ e^{\alpha Z}\ e^{j\beta Z}$ representa el retardo de la onda producido por reflexión. La reflexión ocurre si la línea de transmisión no está armonizada con su carga. Como la onda está viajando en la dirección opuesta al avance de la onda, $e^{\alpha Z}$ todavía representa una atenuación pero en este caso una atenuación cuando Z decrece.

Una línea de menor pérdida es una en la cual la atenuación es despreciable. Este caso corresponde a que $\alpha = 0$, y así $\gamma = j\beta$. Si $\gamma = j\beta$ entonces $\gamma^2 = -\beta^2$ así que, de (4), $(R + j\,\omega L)(G + j\,\omega C)$ debe ser real y negativo. Vemos que éste es el caso cuando $R = 0$ y $G = 0$. Esto coincide con lo que esperaríamos en la práctica puesto que la resistividad y conductividad tienen que ver principalmente con la disipación de energía.

Ejemplo 2. Supóngase que un automóvil que pesa 1600lb oscila verticalmente como si fuese una masa $m = 50$ slugs en un resorte simple (con una constante $k = 4800$lb/p) sujeta a un amortiguador simple (con constante de amortiguación $c = 200$lb-s/p). Supóngase que este automóvil es conducido a lo largo de una carretera de superficie rugosa cuya amplitud de onda es de 2 pulgadas y cuya longitud de onda es $L = 30\,p$ (véase la Fig. 3). ¿A qué velocidad del automóvil (en millas por hora) ocurrirán vibraciones con resonancia?

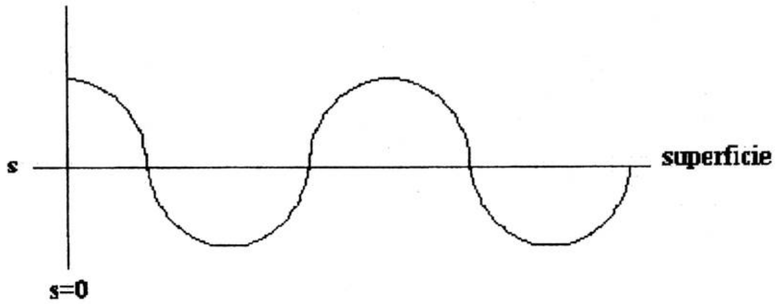


Figura 3

Pensemos que el automóvil es uniciclo, como se ilustra en la figura 4. Sea $x(t)$ el desplazamiento hacia arriba de la masa m a partir de su posición de equilibrio; ignoremos la fuerza de gravedad, ya que simplemente desplaza la posición de equilibrio. Escribamos la ecuación de la superficie de la carretera como:

$$y = a\cos(2\pi s/L) \qquad (a = 1/6p,\ L = 30\,p) \qquad (6)$$

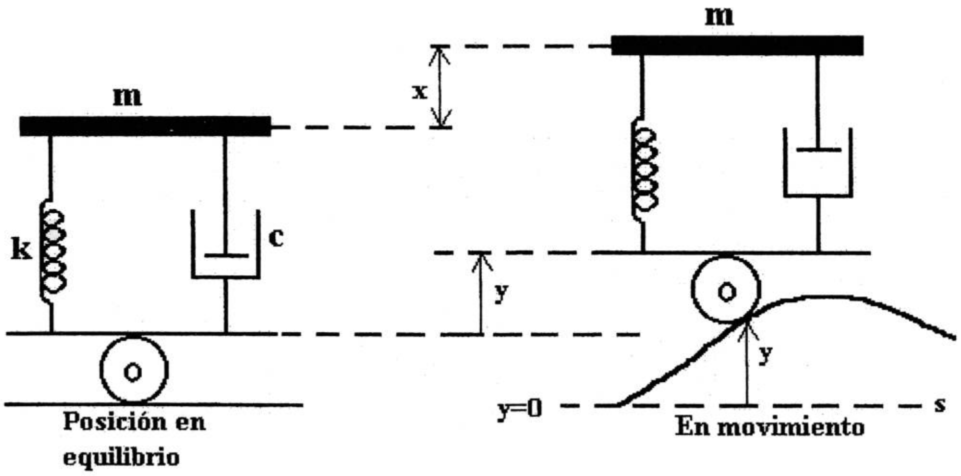


Figura 4

Cuando el carro está en movimiento, el resorte se estira la longitud $x - y$; así que, según la segunda ley de Newton, $F = m\,a$, $m\,x'' = -k\,(x - y)$, es decir,

$$m\,x'' + k\,x = k\,y \qquad (7)$$

Si la velocidad del carro es v, entonces $s = v\,t$ en la ecuación (6), así que (7) toma la forma

$$m\,x'' + k\,x = k\,a\cos(2\,\pi\,v\,t\,/\,L) \qquad (8)$$

Esta es la ecuación diferencial que gobierna las oscilaciones verticales del automóvil. Tenemos oscilaciones forzadas con frecuencia $\omega = 2\,\pi\,v\,/\,L$. La frecuencia del sistema es $\omega_0 = (k\,/\,m)^{1/2}$, y la resonancia ocurrirá cuando $\omega = \omega_0 = (k\,/\,m)^{1/2}$. Si sustituimos nuestros datos numéricos, podemos encontrar la velocidad del auto en el momento en que ocurre la resonancia, hallamos:

$$v = (L\,/\,2\,\pi)\,(k\,/\,m)^{1/2} = (30\,/\,2\,\pi)\,(4800\,/\,50)^{1/2} \quad p\,/\,s,$$

o sea, alrededor de 32 mi /h.

1.4 Convolución

En el análisis de sistemas lineales, uno de los aspectos más importantes es conocer la respuesta o salida del sistema provocada por señales de entrada. En la sección 1.3 hemos indicado de una manera muy somera el uso de las ecuaciones diferenciales y su solución para modelar el sistema. Estas técnicas se encuentran muy fácilmente en "cualquier" libro de ecuaciones diferenciales. El empleo de la operación de convolución constituye otro método de análisis, que se basa en la propiedad de superposición de los sistemas lineales. En esta sección se estudiará dicho método.

Desde un punto de vista intuitivo desarrollamos el concepto de convolución de la siguiente manera: en primer lugar necesitamos hablar de la "función" impulso o delta de Dirac. Consideremos una fuerza $f(t)$ que actúa sólo durante un intervalo de tiempo muy pequeño $a \leq t \leq b$, con $f(t) = 0$ para todo valor de t fuera del intervalo. Un ejemplo típico sería la fuerza impulsiva de un bat que golpea una pelota (el impacto es casi instantáneo). Un rápido aumento de voltaje (resultante de la descarga de un rayo, por ejemplo), es un fenómeno eléctrico análogo. En tal situación, a menudo ocurre que el principal efecto de la fuerza depende nada más del valor de la integral

$$p = \int_a^b f(t)\,dt \qquad (1)$$

y no es influenciado por la forma precisa en que varía $f(t)$. El número p de la ecuación (1) se llama impulso de la fuerza $f(t)$ sobre el intervalo $[a, b]$.

En el caso de una fuerza $f(t)$ que actúa sobre una partícula que se mueve linealmente, la integración de la ley de Newton

$$F(t) = m\,v'(t) = d/dt\,[m\,v(t)]$$

produce:

$$p = \int_a^b d/dt\,[m\,v(t)]\;dt = m\,v(b) - m\,v(a) \qquad (2)$$

Así que el impulso de la fuerza es igual a la variación del momentum de la partícula. Por eso, si el cambio en el momentum es el único efecto que nos interesa, sólo necesitamos conocer el impulso de la fuerza; no necesitamos conocer ni la función precisa $f(t)$ ni el lapso exacto durante el cual actúa la fuerza. Esto resulta afortunado, dado que en una situación como la correspondiente a la pelota bateada es poco probable que obtengamos información detallada sobre la fuerza impulsiva que actúa sobre ella.

Supóngase, para simplificar, que $f(t)$ tiene un impulso de 1 y que actúa durante un pequeño intervalo de tiempo que comienza en el instante $t = a$. Entonces, podemos seleccionar un número fijo $\varepsilon > 0$ que se aproxime a la duración de ese lapso y reemplazar a $f(t)$ mediante la función específica

$$\delta_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon\,, & a \le t \le a+\varepsilon \\ 0\,, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Si $b \ge a + \varepsilon$, entonces el impulso $\delta_{a,\varepsilon}(t)$ sobre el intervalo $[a, b]$ es

$$p = \int_a^b \delta_{a,\varepsilon}(t)\,dt = \int_a^{a+\varepsilon} (1/\varepsilon)\,dt = 1.$$

Así, $\delta_{a,\varepsilon}(t)$ tiene un impulso unitario, cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$. Un cálculo que en esencia es el mismo da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{a,\varepsilon}(t)\, dt = 1 \qquad (4)$$

Dado que el lapso preciso durante el cual actúa la fuerza no parece ser importante, resulta tentador pensar en un impulso instantáneo que ocurra precisamente en el instante $t = a$. Podríamos intentar la formulación de un modelo de tal impulso unitario instantáneo tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, con lo cual definiríamos

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{a,\varepsilon}(t) \qquad (5)$$

Si podemos también tomar el límite dentro del signo integral (4), entonces se seguirá que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, dt = 1 \qquad (6)$$

Pero el límite de la fórmula (5) da

$$\delta(t-a) = \begin{cases} +\infty, & t = a \\ 0, & t \neq a \end{cases} \qquad (7)$$

Es claro que ninguna función puede satisfacer a la vez las ecuaciones (6) y (7). (Si una función vale cero con la excepción de un solo punto, entonces su integral vale 0, no 1). Alrededor de 1950, después de que los ingenieros y físicos habían estado usando amplia y fructíferamente la función delta alrededor de 20 años sin justificación rigurosa, el matemático francés Laurent Schwartz desarrolló una teoría matemática rigurosa de funciones generalizadas que proporcionó el fundamento lógico para las técnicas basadas en la función delta. El símbolo $\delta(t-a)$, se llama función delta de Dirac en a, en honor del físico teórico británico P.A.M. Dirac que en los primeros años de la década de 1930 introdujo una función que supuso disfrutaba de las propiedades (6) y (7).

El siguiente cálculo motiva el significado que asignaremos aquí al símbolo $\delta(t-a)$. Si $g(t)$ es una función continua, entonces el teorema del valor medio para integrales implica que

$$\int_{a}^{a+\varepsilon} g(t)\, dt = \varepsilon\, g(\bar{t})$$

para algún punto $\bar{t}$ del intervalo $[a, a+\varepsilon]$. Se sigue que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ \delta_{a,\varepsilon}(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{a+\varepsilon} g(t)\ (1/\varepsilon)\, dt \qquad (8)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} g(\bar{t}) = g(a)$$

por la continuidad de g en $t = a$. Si $\delta(t-a)$ fuera una función en el estricto sentido de la definición, y pudiéramos intercambiar el límite y la integral (8), podríamos concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ \delta(t-a)\, dt = g(a) \qquad (9)$$

Tomamos la ecuación (9) como definición del símbolo $\delta(t-a)$. Aunque la llamemos función delta, no será una función genuina; en vez de ello, especifica la operación

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\ )\ \delta(t-a)\, dt$$

que, cuando se aplica a una función continua $g(t)$, selecciona el valor $g(a)$ de esta función en el punto a. Usaremos el símbolo $\delta(t-a)$ sólo dentro del contexto de integrales tales como la que se presenta en la ecuación (9). Por ejemplo, si tomamos $g(t) = Exp[-s\ t]$ en (9), hallamos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp[-s\ t]\ \ \delta(t-a)\, dt = exp[-a\ s]$$ (transformada de Laplace de la función delta)

Al trabajar la convolución investigaremos la respuesta a un impulso unitario. Supongamos por ejemplo, que se nos ha dado un sistema mecánico cuya respuesta $x(t)$ a la fuerza externa $f(t)$ está determinada por la ecuación diferencial

$$A\,x'' + B\,x' + C\,x = f(t) \qquad (10)$$

Para investigar la respuesta de este sistema a un impulso unitario en el instante $t = a$, parece razonable reemplazar $f(t)$ por $\delta(t-a)$ y empezar con la ecuación

$$A\,x'' + B\,x' + C\,x = \delta(t-a) \qquad (11)$$

Pero, ¿cuál es el significado de una solución de tal ecuación? Diremos que $x\,(t)$ es una solución de (11) en tanto que

$$x\,(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} x_{\varepsilon}(t) \qquad (12)$$

en la que $x_{\varepsilon}(t)$ es una solución de

$$A\,x'' + B\,x' + C\,x = \delta_{a,\varepsilon}(t) \qquad (13)$$

Puesto que: $\delta_{a,\varepsilon}(t) = (1/\varepsilon)\,[u\,(t-a) - u\,(t-a-\varepsilon)\,]$, donde $u\,(t-a)$ es la función escalón unitario definida por:

$$u(t-a) = \begin{cases} 1\,, t \geq a \\ 0\,, t < a \end{cases}$$

es una función ordinaria, la ecuación (13) adquiere sentido. Sobre esta base, es razonable resolver una ecuación diferencial que incluya la función delta exactamente como si $\delta\,(t\text{-}a)$ fuese una función ordinaria.

Antes de abordar nuestro tema principal, la convolución, diremos que resulta útil considerar la función delta $\delta\,(t-a)$ como la derivada de la función escalón unitario $u\,(t-a)$. Para ver esto emplearemos el concepto de funciones de prueba. Una función de prueba $\theta\,(t)$ es una función continua, con derivadas continuas de todos los órdenes y que es cero fuera de un intervalo finito. Un tipo de estas funciones es

$$\theta(t) = \begin{cases} \exp[-\alpha^2/(\alpha^2 - t^2), |\,t\,| < \alpha \\ \quad 0\,, \textit{en otros casos} \end{cases}$$

Las funciones de prueba se emplean como método para "examinar" la función impulso integrando $\theta\,(t)$ y $\delta\,(t)$ (ó $\delta\,(t-a)$) en el intervalo (-∞, ∞). En general, este procedimiento es análogo al que emplea la salida de un instrumento de medición para deducir propiedades de lo que se está midiendo.

La <u>propiedad de equivalencia</u> es una definición básica que se emplea constantemente en el análisis de funciones impulso empleando funciones de prueba. Suponga que $d_1(\,t\,)$ y $d_2\,(\,t\,)$

son expresiones que incluyen, además de otras, funciones impulso. Se define $d_1(t) = d_2(t)$ si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\, d_1(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\, d_2(t)\, dt \qquad (14)$$

para todas las funciones de prueba $\theta(t)$ para las que exista la integral. En general se puede decir que $d_1(t) = d_2(t)$ si el "instrumento de medición" no detecta diferencia entre ellas.

Si consideramos $u(t)$ empleando la propiedad de equivalencia, hallamos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \theta(t)\, dt = \theta(0), \qquad \text{por (9)}$$

Integrando por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\, \theta(t)\, dt = u(t)\, \theta(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \theta'(t)\, dt$$

$$= 0 - \int_{0}^{\infty} \theta'(t)\, dt$$

$$= -\,\theta(t) \Big/_{0}^{\infty} = \theta(0).$$

Se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \theta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\, \theta(t)\, dt,$$

de lo cual, $u'(t) = \delta(t)$.

Otra equivalencia útil es

$$f(t)\, \delta(t) = f(0)\, \delta(t) \qquad (15)$$

siendo $f(t)$ continua en $t = 0$. La ecuación (15) se puede obtener de

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,\theta(t)\,dt = f(0)\,\theta(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\,\delta(t)\,\theta(t)\,dt$$

Empleando (15) se puede obtener, por ejemplo que:

$$A\,e^{t}\,\delta(t) = A\,\delta(t)$$

$$e^{t}\cos(t)\,\delta(t) = \delta(t)$$

$$A\,sen(t)\,\delta(t) = A\,sen(0)\,\delta(t) = 0$$

Denotando la derivada la *n*-ésima de $\delta(t)$ *por* $\delta^{(n)}(t)$, se debe tener que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\,\theta(t)\,dt = (-1)^{n}\,\theta^{(n)}(0) \qquad (16)$$

La ecuación (16) se obtiene integrando por partes *n* veces. Así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\,\theta(t)\,dt = \delta^{(n-1)}(t)\,\theta(t)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-1)}\,\theta'(t)\,dt$$

$$= -\,\delta^{(n-2)}\,\theta'(t)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-2)}\,\theta''(t)\,dt$$

$$\ldots$$

$$= (-1)^{n}\,\theta^{(n)}(0).$$

A continuación, se analizará la convolución en sistemas de tiempo continuo (de hecho, para los sistemas lineales invariables en el tiempo).

Considere una red eléctrica *N* sin energía almacenada inicialmente a la cual se aplica una función excitatriz $x(t)$. En algún momento en este circuito se presenta una función respuesta $y(t)$. Ilustramos esto en la Figura 5(a).

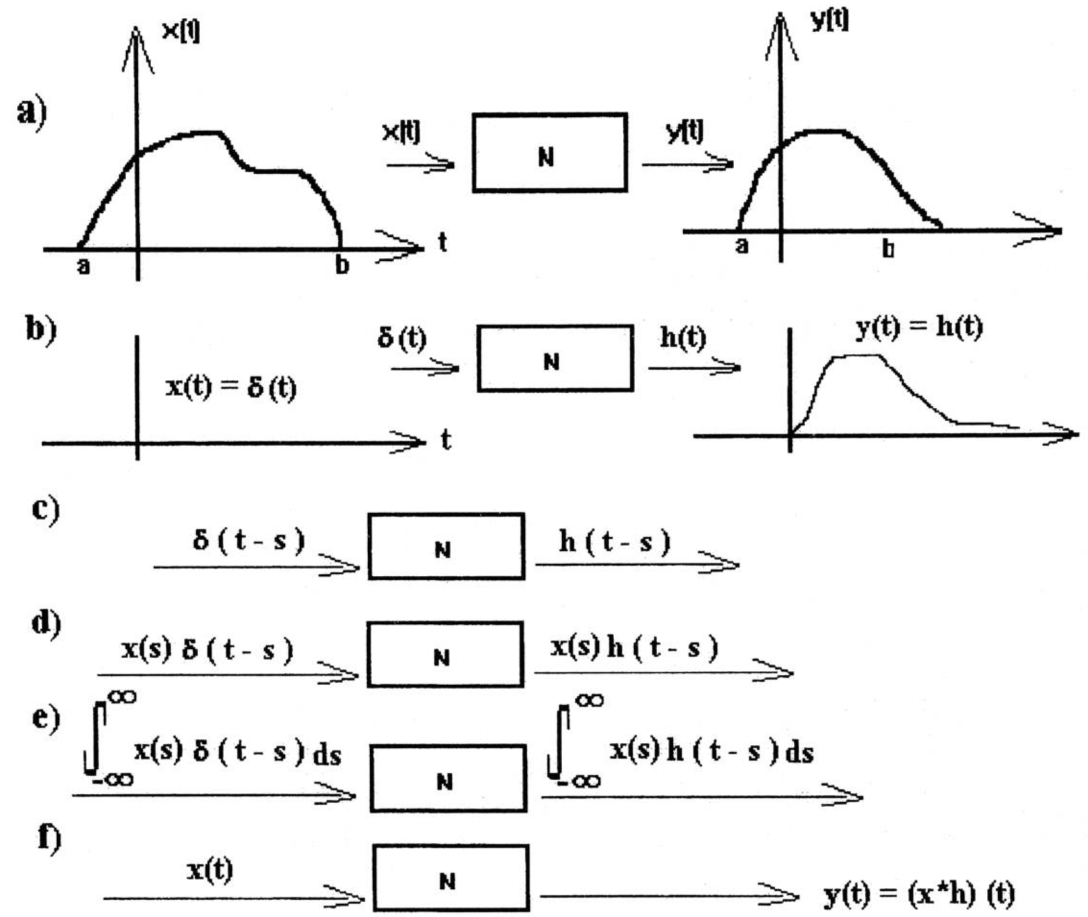


Figura 5

La función excitatriz sólo existe arbitrariamente en el intervalo $a < t < b$. Por tanto, $y\ (\ t\ )$ únicamente puede existir para $t > a$. La pregunta que deseamos responder ahora es: si conocemos la forma de $x\ (\ t\ )$, ¿cómo describir a $y\ (\ t\ )$?. Para contestar esta pregunta, obviamente necesitamos conocer algo acerca de *N*. Por tanto, suponga que sabemos cómo responde *N* cuando la función excitatriz es $\delta\ (\ t\ )$. Es decir, suponemos que conocemos $h\ (\ t\ )$, la función respuesta a $\delta\ (\ t\ )$ en $t = 0$, ver Figura 5(b). La función $h\ (\ t\ )$ se llama la <u>respuesta</u> <u>impulso</u>. Esta es una propiedad descriptiva muy importante para un circuito eléctrico. Si el impulso se aplica en $t = s$, el único cambio sería un retraso en la salida. Así la respuesta se convierte en $h\ (\ t - s\ )$ cuando la entrada es $\delta\ (\ t\ \text{-}\ s)$, ver (c). Supongamos que el impulso unidad tuviera una intensidad diferente a la unidad. Específicamente, sea la intensidad numéricamente igual al valor de $x\ (\ t\ )$ cuando $t = s$. Este valor $x\ (\ s\ )$ es una constante, sabemos que la multiplicación de una sola función excitatriz en un circuito lineal por una constante, simplemente produce en la respuesta un cambio proporcional. Así, si la entrada cambia a $x\ (\ s\ )\ \delta\ (\ t\ \text{-}\ s)$, entonces la respuesta se convierte en $x\ (\ s\ )\ h\ (\ t$

- $s)$, ver (d). Ahora sumemos esta entrada sobre todos los posibles valores de s y utilizamos el resultado como una función excitatriz para N. La linealidad establece que la respuesta debe ser igual a la suma de las respuestas que resultan del uso de todos los valores posibles de s. Hablando vagamente, la integral de la entrada produce la integral de la salida, ver (e). Pero ahora, ¿cuál es la entrada?, utilizando la propiedad (9), observamos que la entrada sencillamente es $x(t)$, la entrada original:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,\delta(t-s)\,ds = x(t)$$

Nuestra pregunta se contesta ahora:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,h(t-s)\,ds = x(t) * h(t) \qquad (17)$$

La salida se halla convolucionando la entrada con la función respuesta al impulso. Frecuentemente resulta más práctico al calcular la respuesta impulso, calcular la respuesta al escalón unitario y recordar que $u'(t) = \delta(t)$.

Antes de mostrar el uso de la técnica de convolución, introducimos notación operacional. Sería conveniente manipular las ecuaciones integro - diferenciales (aunque no se resuelvan) de igual forma que las algebraicas. Con este fin definimos el operador *"p"* como

$$p = d/dt \qquad (18)$$

Así $pf = df/dt$ y $p^n f = d^n f/dt^n$. También definimos $1/p$ como integración, de forma que

$$(1/p)(pf) = p(f/p) = f$$

Para este caso debemos definir

$$(1/p)f = \int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt \qquad (19)$$

Si $f(t) = 0$ para $t < 0$, tenemos

$$(1/p)f = \int_{0^-}^{t} f(t)\,dt \qquad (20)$$

Ejemplo 1. Si $f(t) = (\cos t)\, u(t)$, calcular pf y $(1/p)(pf)$.
Solución.

$$pf = -(\text{sen } t)\, u(t) + \cos t\, \delta(t)$$
$$= -(\text{sen } t)\, u(t) + 1\, \delta(t) \qquad \text{(por (15))}$$

$$(1/p)(pf) = \int_{0^-}^{t} [\, -(\text{sen } t)\, u(t) + \delta(t)\,]\, dt$$

$$= \cos t \Big|_{0^-}^{t} + 1 = \cos t - 1 + 1$$
$$= \cos t\,.$$

Ejemplo 2. Escribir la siguiente ecuación integro-diferencial con la notación del operador p.

$$d^2y / dt^2 + 4\, dy / dt + 8y + 3 \int_0^t y\, dt = 8 (\cos t)\, u(t)$$

Solución.

$$p^2 y + 4\, p\, y + 8\, y + 3\, (1/p)\, y = 8 \cos t, \qquad t > 0.$$

Notas. 1) Las ecuaciones, para sistemas eléctricos, en términos del operador p quedan así:

a) $v = i\, R \qquad\qquad i = (1/R)v$

b) $v = L\, di/dt = L\, p\, i \qquad\qquad i = (1/Lp)v + i(0^-)$

c) $v = (1/c) \int i(t)\, dt + v(0^-) \qquad\qquad i = c\, p\, v$

$\quad = (1/cp)\, i + v(0^-)$

2) La ecuación (20) indica cualquier condición de acumulación de energía distinta de cero, para $t = 0$.

3) El operador p no es una variable algebraica, sino un símbolo que indica que una cierta operación se ha de realizar con la función que va a continuación.

4) Los operadores *p* y 1/*p* son lineales. Debido a que el operador *p* posee las propiedades algebraicas conmutativa, asociativa y distributiva, cualquier expresión que contenga el operador *p* podrá tratarse según las normas del álgebra.

Ejemplo 3. Para

$$C_1\, dV_1/dt + (1/R_1)(V_1 - V_2) = i\,(t)$$

$$(1/R_1)(V_1 - V_2) = (1/R_2)\, V_2 + C_2\,(dV_2\,/d\,t)$$

Sustituyendo p = d /d t tenemos

$$C_1 p V_1 + (1/R_1)(V_1 - V_2) = i\,(t) \qquad (21)$$

$$y \quad (1/R_1)(V_1 - V_2) = (1/R_2)\, V_2 + C_2\, p\, V_2 \qquad (22)$$

Despejando primero V_1 en (21) y después V_2 en (22) se obtiene:

$$V_1 = (1/(R_1 C_1 p + 1))\, V_2 + (R_1/(R_1 C_1 p + 1))\, i\,(t) \qquad (23)$$

$$y \quad V_2 = (R_2 V_1)/(R_1 R_2 C_2 p + R_1 + R_2) \qquad (24)$$

Sustituyendo (23) en (24), simplificando y ordenando, obtenemos

$$[R_1 C_1 C_2 p^2 + (((R_1 + R_2)\, C_1 + R_2 C_2)/\, R_2)\, p + 1/\, R_2]\, V_2 = i$$

o

$$R_1 C_1 C_2\, (d^2 V_2\,/\,d\,t^2) + (((R_1 + R_2)\, C_1 + R_2 C_2)\,/\,R_2)\,(dV_2\,/\,d\,t) + (1/\,R_2)\, V_2 = i$$

Ejemplo 4. Calcular la respuesta al impulso del circuito RC de la Figura 6. Para determinar la respuesta al impulso.

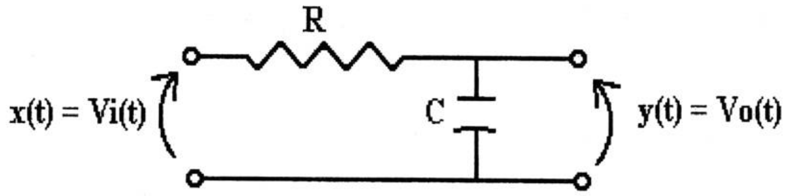


Figura 6

Calcularemos primero la respuesta al escalón g (t) y después derivaremos para obtener la respuesta al impulso h (t). Para simplificar, supongamos que RC = 1, la ecuación que relaciona y (t) y x (t) es:

$$x(t) + Ri + (1/C)\int i(t)\,dt = 0 \qquad (25)$$

$$y(t) + (1/C)\int i(t)\,dt = 0 \qquad (26)$$

De (26), $y' + (1/C)\,i = 0$; luego, $i = -C\,y'$. Usando esto y (26) en (25):

$$x + R(-C\,y') - y = 0\;;\; -RC\,y' - y = -x\;;\; dy/dt + y(t) = x(t)$$

La respuesta al escalón se obtiene resolviendo

$$(d\,g(t)/dt) + g(t) = u(t)$$

con $g(0) = 0$. Usando el método de factor integrante para una ecuación diferencial lineal hallamos

$$(d/dt)\,[\,g(t)\,e^{t}\,] = \begin{cases} e^{t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases},$$

de aquí

$$g(t) = (1 - e^{-t})\,u(t) \qquad (27)$$

Entonces

$$h(t) = d/dt\,(g(t)) = d/dt\,[\,(1 - e^{-t})\,u(t)\,]$$

$$= e^{-t}u(t) + (1 - e^{-t})\,\delta(t) = e^{-t}u(t)$$

Ejemplo 5. Obtener la respuesta al escalón unitario del sistema de la figura 7.

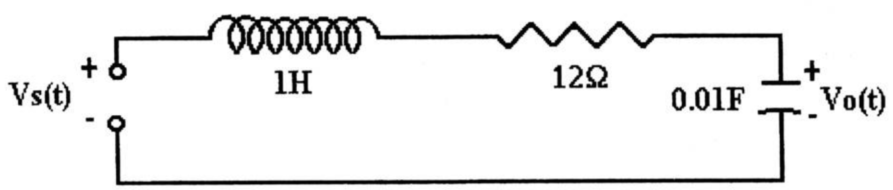


Figura 7

Sumando las tensiones a lo largo del circuito

$$V_R + V_C + V_L = V_s,$$

o en función de la corriente i,

$$iR + (1/cp)(i) + Lp\, i = V_s$$

así,

$$(R + 1/cp + Lp)i = V_s \qquad (28)$$

Sabemos que

$$i_c = c\, p\, V_C \qquad (29)$$

y en este problema $i = i_c$, por lo tanto, sustituyendo (29) en (28) obtenemos

$$(R\, c\, p + 1 + L\, c\, p^2)\, V_C = V_s;$$

$$V\, c = (1 / (R\, c\, p + 1 + L\, c\, p^2)\, V_s\, ;$$

$$Vc = (1 / L\, c)V_s / ((p^2 + (R / L)\, p + 1/Lc))$$

Así, con $R = 12\Omega$, $L = 1$ H y $c = 0.01$ F, la ecuación del sistema para Vc es

$$(p^2 + 12\, p + 100)\, Vc = 100\, V_s$$

y con $V_s = u(t)$ tenemos:

$$(p^2 + 12\, p + 100)\, Vc = 100, \quad t > 0. \qquad (30)$$

Para la respuesta natural:

$$s^2 + 12s + 100 = 0 \text{ ... ecuación auxiliar}$$

$$s = -6 \pm j8 \text{ ... Caso sub- amortiguado}$$

Entonces:

$$V_{CN} = e^{-6t}\,(A \cos 8t + B \operatorname{sen} 8t)$$

Para la respuesta particular, proponemos

$$V_{CP} = k,$$

así

$$V_{CP}' = V_{CP}'' = 0 \qquad \text{sustituyendo en (30);}$$

$$(0 + 0 + 100)\, k = 100; \; k = 1$$

y, por lo tanto, $V_{CP} = 1$.

La respuesta completa al escalón unitario es:

$$V_C(t) = V_{CP}(t) + V_{CN}(t) = 1 + e^{-6t}(A \cos 8t + B \text{ sen } 8t) \tag{31}$$

y

$$V_C'(t) = e^{-6t}(-8 A \text{ sen } 8t + 8 B \cos 8t) - 6 e^{-6t}(A \cos 8t + B \text{ sen } 8t) \tag{32}$$

Calculando (31) en t = 0, con condiciones iniciales cero, se obtiene:

$$0 = 1 + (1)[A(1) + 0] \;;\; A = -1,$$

y usando esto en (32) en *t* = 0, con condiciones iniciales cero, da

$$0 = 1(0 + 8B) - 6(1)(-1 + 0) \;;\; B = -3/4$$

Por tanto,

$$g(t) = V_C(t) = 1 - e^{-6t}(\cos 8t + (3/4) \text{ sen } 8t)$$

$$= 1 - 1.25\, e^{-6t} \cos(8t - 36.9°).$$

Ejemplo 6. Obtener la salida y (t) dada la entrada x (t) = t u (t) a un sistema en el cual la respuesta al impulso es $h(t) = e^{-t} u(t)$. Las condiciones iniciales son cero.

Utilizando la convolución, debemos calcular

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - s)\, h(s)\, ds$$

De modo que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - s)\, u(t - s)\, e^{-s}\, u(s)\, ds$$

$$= \int_{0}^{t} (t - s)\, e^{-s}\, ds \qquad (\text{si y sólo si } t > 0)$$

$$= \int_{0}^{t} t\, e^{-s}\, ds - \int_{0}^{t} s\, e^{-s}\, ds,$$

donde la segunda integral se hace por partes.

$$y(t) = t\,(e^{-s}/-1)\Big|_0^t - [e^{-s}(-s-1)]\Big|_0^t$$

$$= -t\,(e^{-t}-1) + e^{-s}(s+1)\Big|_0^t$$

$$= -t\,e^{-t} + t + e^{-t}(t+1) - 1$$

$$= \begin{cases} t - 1 + e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases};$$

$$y(t) = (t - 1 + e^{-t})\,u(t).$$

Ejemplo 7. En el circuito de la figura 8 todas las condiciones iniciales son cero, esto es, todas las tensiones son iguales a cero en t = 0 (estado cero).

a) Obtener la respuesta al impulso unidad para V_2.

b) Obtener la respuesta debida a un cortocircuito, pulso alto de área unidad (un impulso aproximadamente).

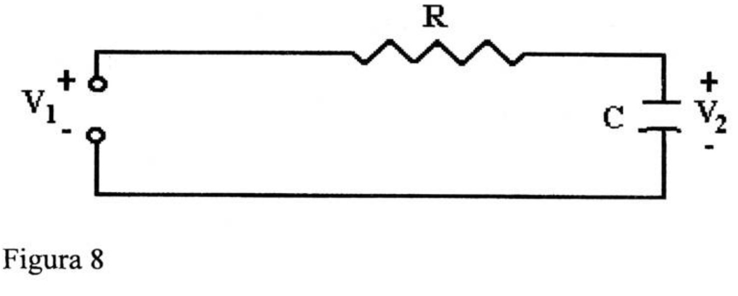


Figura 8

(a) $V_2 = ((1 / R\,C)/(p + (1/R\,C))\,V_1$ (ver ejemplo 5)

Si $V_1(t) = u(t)$, entonces:

$$d\,g(t)/d\,t + (1/RC)\,g(t) = 1/RC \quad \text{si y sólo si } t > 0,$$

donde $g(t)$ es la respuesta al escalón unitario. Entonces

$$g(t) = 1 + c\,e^{-(1/RC)t} \quad \text{con } g(0) = 0,$$

por tanto

$$g(t) = (1 - e^{-(1/RC)t})\,u(t)$$

La respuesta al impulso unitario es:

$$h(t) = g(t)' = (1 - e^{-(1/RC)t})\,\delta(t) + (1/RC)\,e^{-(1/RC)t}\,u(t)$$

$$= (1/RC)\,e^{-(1/RC)t}\,u(t)$$

b) Pongamos $v_1(t) = u(t) - u(t-1)$, entonces

$$v_2(t) = v_1(t) * h(t);$$

$$v_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(t-s) - u(t-1-s)]\,(1/RC)\,e^{-(1/RC)s}\,u(s)\,ds$$

Para $0 < t < 1$:

$$V_2(t) = \int_0^t [1-0]\,(1/RC)\,e^{-(1/RC)s}\,ds$$

$$= -e^{-(1/RC)s}\Big|_0^t = 1 - e^{-(1/RC)t}$$

Para $t > 1$:

$$V_2(t) = \int_{t-1}^t [1-0]\,(1/RC)\,e^{-(1/RC)s}\,ds$$

$$= \int_{t-1}^{t} (1/RC)\, e^{-(1/RC)s}\, ds$$

$$= - e^{-(1/RC)s} \Big|_{t-1}^{t}$$

$$= - e^{-(1/RC)t} + e^{-(1/RC)(t-1)}$$

$$= (1 - e^{-(1/RC)})\, e^{-(t-1)/RC} .$$

En conclusión

$$v_2(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/RC}, & 0 < t < 1 \\ (1 - e^{-1/RC})\, e^{-(t-1)/RC}, & t > 1. \end{cases}$$

Si ahora ponemos

$$v_1(t) = 10[\, u(t) - u(t - 0.1)\,]$$

hallamos

$$v_2(t) = \begin{cases} 10\,(1 - e^{-t/RC}), & 0 < t < 0.1 \\ 10\,(1 - e^{-0.1/RC})\, e^{-(t-0.1)/RC}, & t > 0.1 \end{cases}$$

Nótese que para $\Delta t < 0.1$ RC, la respuesta a estado cero a la aproximación de $\delta(t)$ es esencialmente igual a la respuesta al impulso $h(t)$. Por ejemplo, si $RC = 1$, entonces para $t > 0.1$

$$v_2(t) = 10\,(1 - e^{-0.1})\, e^{-(t-0.1)}$$

$$= 10\,(e^{-0.1} - 1)\, e^{-t}$$

$$\cong 1.051709\, e^{-t} \cong h(t)$$

NOTA: a) Hacemos notar que la convolución únicamente produce respuesta a estado cero (las condiciones iniciales son cero).

b) La forma general de convolución entre h (t) y x (t) puede simplificarse en muchas ocasiones. Frecuentemente, la respuesta al impulso es una función <u>causal</u>, es decir, no puede iniciar la respuesta hasta que reciba una señal de entrada, esto es: $h(t) = 0$ para $t < 0$. En este caso $h(t - s) = 0$ para $s > t$ y entonces puede cambiarse el límite superior de la integración por t en vez de ∞. Si la señal de entrada también es causal, también puede reemplazarse el límite inferior de la integración por 0. Así, podemos tener los siguientes casos:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\, h(t - s)\, ds \;; \quad x(t) \text{ y } h(t) \text{ general.}$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} x(s)\, h(t - s)\, ds \;; \quad x(t) \text{ y } h(t) \text{ causal.}$$

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} x(s)\, h(t - s)\, ds \;; \quad x(t) \text{ causal y } h(t) \text{ general.}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)\, h(t - s)\, ds \;; \quad x(t) \text{ general y } h(t) \text{ causal.}$$

Almacenamiento de Energía Inicial en Sistemas Lineales

En la deducción de la integral de convolución se supuso implícitamente que el sistema está inicialmente desenergizado (ver Nota anterior (a)). Si el sistema posee alguna energía inicial almacenada, entonces deben incluirse fuentes de entrada que producen dicha energía inicial y considerarse como funciones independientes de entrada al sistema. Entonces, la respuesta total es la suma de las respuestas debidas a la señal de entrada y a las fuentes de energía inicial. Consideremos la siguiente figura 9.

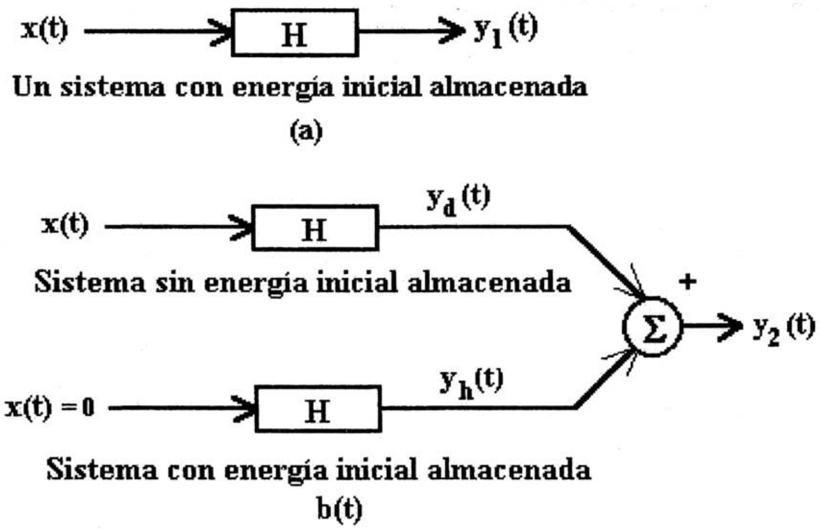


Figura 9

Escribiremos la salida y_2 (t) del sistema como la suma de y_d (t), salida de un sistema inicialmente en reposo alimentado con la entrada x(t), más y_h (t), salida de un sistema no forzado con condiciones iniciales idénticas a las del sistema dado. Entonces tenemos

$$y_2(t) = y_d(t) + y_h(t)$$

donde

$$L[y_d(t)] = b_n y_d^{(n)}(t) + b_{n-1} y_d^{(n-1)}(t) + \ldots + b_0 y_d(t) = x(t)$$

$$y_d(0) = y_d'(0) = \ldots = y_d^{(n-1)}(0) = 0$$

y

$$L[y_h(t)] = 0$$

$$y_h(0) = y_1(0);\ y'_h(0) = y_1'(0);\ \ldots;\ y_h^{(n-1)}(0) = y_1^{(n-1)}(0)$$

De este modo $y_1(0)$, $y_1'(0)$, . . . , $y_1^{(n-1)}(0)$ son las condiciones iniciales dadas para el sistema. Para demostrar que $y_2(t)$ en el sistema descompuesto es igual a $y_1(t)$ en el sistema original, debe observarse que las dos funciones satisfacen la misma ecuación diferencial

$$L[y_2(t)] = L[y_h(t) + y_d(t)] = x(t)$$

$$L[y_1(t)] = x(t)$$

y que ellas tienen las mismas condiciones iniciales

$$y_2(0) = y_h(0) + y_d(0) = y_1(0)$$

$$y_2'(0) = y_h'(0) + y_d'(0) = y_1'(0)$$

$$\cdots$$

$$y_2^{(n-1)}(0) = y_h^{(n-1)}(0) + y_d^{(n-1)}(0) = y_1^{(n-1)}(0)$$

De lo anterior se concluye que $y_1(t) = y_2(t)$ para toda $t > 0$, puesto que la solución de una ecuación diferencial de orden n-ésimo con n condiciones iniciales es única.

Ejemplo 8. Considere el sistema descrito por

$$y''(t) + y(t) = \operatorname{sen} t\,;\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$$

El término $y_h(t)$ en la descomposición del sistema es independiente de la entrada $x(t) = \operatorname{sen} t$. Este término puede calcularse resolviendo la ecuación diferencial homogénea

$$y_h''(t) + y_h(t) = 0$$

con condiciones iniciales $y_h(0) = 1$, $y_h'(0) = 0$.

Resolviendo esta ecuación se obtiene

$$y_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$$

en donde:

$$y_h(0) = 1 \quad \text{da} \quad C_1 = 1$$

$$y_h'(0) = 0 \quad \text{da} \quad C_2 = 0$$

Así, $y_h(t) = \cos t$, y el sistema equivalente puede representarse como en la Figura 10.

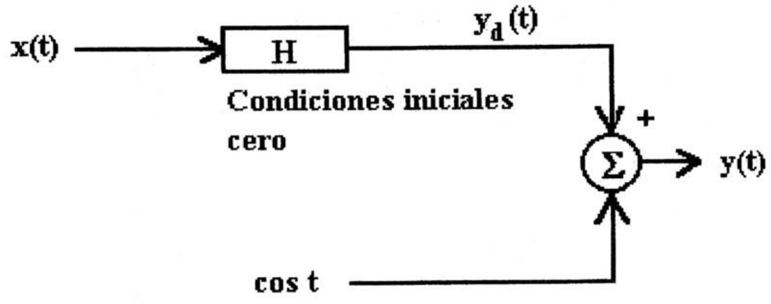


Figura 10

Para encontrar $y_d(t)$, debe resolverse la ecuación no homogénea

$$y_d''(t) + y_d(t) = x(t) = \text{sen } t$$

y condiciones iniciales cero. Usando el método de coeficientes indeterminados obtenemos

$$y_d(t) = C_1 \cos t + C_2 \text{ sen } t + C_3\, t \cos t + C_4\, t \text{ sen } t$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial original, se llega a: $C_3 = -1/2$, $C_4 = 0$.

Aplicando las condiciones iniciales $y_d(0) = 0$, $y_d'(0) = 0$ se obtiene $C_1 = 0$ y $C_2 = 1/2$. Asi

$$y_d(t) = (\text{sen } t - t \cos t)/2$$

Sumando los términos $y_h(t)$ y $y_d(t)$, la solución será

$$y(t) = y_h(t) + y_d(t)$$

$$= \cos t + (\text{sen } t - t \cos t)/2$$

que puede comprobarse con otros métodos.

Método Alternativo Para Hallar la Función Respuesta al Impulso. Se supone que $x(t)$ es una señal causal.

Ya hemos usado una técnica. Supóngase que se tiene un sistema definido por la ecuación diferencial

$$L[y(t)] = x(t)$$

Se puede calcular su respuesta al escalón a partir de

$$L[g(t)] = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

con las condiciones iniciales apropiadas. Entonces, la respuesta al impulso h (t) se puede obtener a partir de

$$h(t) = d/dt\,[g(t)] \qquad \text{(Ver nota final de esta sección)}$$

Un segundo y más poderoso método se basa en el conocimiento de las soluciones homogéneas de

$$L[y(t)] = x(t)$$

Para desarrollar este método, supóngase que se tiene un sistema de segundo orden de la forma

$$L[y(t)] = y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t) \qquad (33)$$

Si se supone que el sistema está inicialmente en reposo, es decir, sin energía almacenada, las condiciones iniciales serán

$$y(0) = 0;\ y'(0) = 0 \qquad (34)$$

Así, si la función de respuesta al impulso es h (t), la salida estará dada por

$$y(t) = \int_0^t x(s)\,h(t-s)\,ds \qquad (35)$$

Las ecuaciones (33) y (35) representan dos métodos de cálculo para la respuesta de salida y (t). Empleando (35) como punto de partida, considérense las condiciones que imponen (33) y (34) a la función respuesta al impulso de (35).

De (35) se observa que y (0) = 0, tal y como lo exige (34). Haciendo y ' (0) = 0 en la derivada de (35) con respecto a t, se obtiene:

$$y'(t) = h(t-s)\,x(s)\Big|_{s=t} + \int_0^t h'(t-s)\,x(s)\,ds$$

$$= h(0)\,x(t) + \int_0^t h'(t-s)\,x(s)\,ds \qquad (36);$$

$y'(0) = 0$ implica que $h(0) = 0$.

Diferenciando de nuevo, se obtiene que

$$y''(t) = h'(t-s)\,x(s)\Big|_{s=t} + \int_0^t h''(t-s)\,x(s)\,ds \qquad (37)$$

Las ecuaciones (35), (36) y (37) son expresiones para $y(t)$, $y'(t)$ y $y''(t)$. Consideremos el resultado de la suma $y''(t) + a_1 y'(t) + a_o\, y(t)$ empleando estas expresiones. Este es

$$h'(0)\,x(t) + \int_0^t h''(t-s)\,x(s)\,ds + a_1 \int_0^t h'(t-s)\,x(s)\,ds + a_o \int_0^t h(t-s)\,x(s)\,ds$$

Se observa que si:

a) $h'(0) = 1$ (38) ; y

b) $$\int_0^t [h''(t-s) + a_1 h'(t-s) + a_o h(t-s)]\,x(s)\,ds = 0 \qquad (39),$$

entonces (35) será una solución de (33). La ecuación (39) implica que el integrando del primer miembro es cero. Si $x(t) \neq 0$, entonces el término del paréntesis es cero. Haciendo el término del paréntesis igual a cero se llega a

$$h''(t-s) + a_1 h'(t-s) + a_0 h(t-s) = 0 \qquad (40)$$

o

$$h'' + a_1 h'(t) + a_0 h(t) = 0 \qquad (41)$$

Desde luego (41) es la ecuación diferencial homogénea original, es decir, (33). Así la respuesta al impulso puede obtenerse calculando las soluciones homogéneas de la ecuación diferencial original. Por lo tanto, h (t) puede expresarse como la suma de dos soluciones homogéneas independientes.

$$h(t) = (C_1 \varnothing_1(t) + C_2 \varnothing_2(t))\, u(t)$$

donde $L[\varnothing_i(t)] = 0$, $i = 1, 2$. Las condiciones iniciales que permiten calcular C_1 y C_2 están dadas por $h(0) = 0$ y $h'(0) = 1$.

Ejemplo 9. Considere el sistema representado por la ecuación diferencial

$$L[y(t)] = y''(t) + y(t) = x(t) \qquad (42)$$

Las soluciones homogéneas de (42) son

$$\varnothing_1(t) = \text{sen } t,\ \varnothing_2(t) = \cos t$$

Así

$$h(t) = (C_1 \text{ sen } t + C_2 \cos t)\, u(t)$$

con $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$. Por lo tanto, las constantes C_1 y C_2 satisfacen

$$h(0) = 0 = C_1 \text{ sen } 0 + C_2 \cos 0$$

$$h'(0) = 1 = (C_1 \cos 0 - C_2 \text{ sen } 0) + (C_1 \text{ sen } t + C_2 \cos t)\, \delta(t)\,|_{t=0}$$

obtenemos $C_2 = 0$ y $C_1 = 1$. En consecuencia, la respuesta al impulso del sistema modelado por (42) es

$$h(t) = (\text{sen } t)\, u(t) \qquad (43)$$

Para verificar este resultado, se sustituye (43) en (42), con

$$\begin{aligned} h'(t) &= d/dt\, [(\text{sen } t)\, u(t)] = (\cos t)\, u(t) + \text{sen } t\, \delta(t) \\ &= (\cos t)\, u(t) \\ h''(t) &= d/dt\, [(\cos t)\, u(t)] = -(\text{sen } t)\, u(t) + (\cos t)\, \delta(t) \\ &= -(\text{sen } t)\, u(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

Obtenemos:

$$h''(t) + h(t) = -(\text{sen } t)\, u(t) + \delta(t) + (\text{sen } t)\, u(t) = \delta(t).$$

Así, la salida y (t) con una entrada cualquiera x (t) causal puede calcularse como

$$y(t) = \int_{0}^{t} \operatorname{sen}(t-s)\, x(s)\, ds.$$

El método anterior puede generalizarse para sistemas de orden n de manera directa. Para el caso general, tomamos

$$L[y(t)] = (p^{n} + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + bo)[y(t)] = x(t) \qquad (44)$$

con condiciones iniciales

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

La salida se expresa de nuevo por

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(t-s)\, x(s)\, ds.$$

Mediante el mismo argumento que se empleó para el caso de segundo orden, se encuentra que la función respuesta al impulso para el sistema (44) debe satisfacer

$$L[h(t)] = 0$$

con condiciones iniciales $h(0) = h'(0) = \ldots = h^{(n-2)}(0) = 0,\ h^{(n-1)}(0) = 1$. Así

$$h(t) = (C_1 \varnothing_1(t) + C_2 \varnothing_2(t) + C_n \varnothing_n(t))\, u(t),$$

en donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se calculan a partir de las anteriores condiciones iniciales.

Nota. Finalmente queremos indicar el por qué si deseamos $h(t)$ $(\delta(t) \to h(t))$ hemos hallado previamente $g(t)$ $(u(t) \to g(t))$ para después afirmar que $h(t) = g'(t)$.

La respuesta al escalón g (t) puede obtenerse convolucionando u (t) y h (t). Es decir,

$$g(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)\, h(t-s)\, ds \qquad (45)$$

Ya que u (t) es cero para t < 0, para un sistema causal (45) puede escribirse como

$$g(t) = \int_0^t h(s)\,ds \qquad (46)$$

La ecuación (46) establece que la respuesta al impulso h (t) es la derivada de su respuesta al escalón; (46) puede generalizarse para cualquier entrada.

1.5 Análisis por Variables de Estado

Mediante notación vectorial-matricial, se puede expresar una ecuación diferencial de orden *n* por una ecuación diferencial vectorial-matricial de primer orden. En esta sección se presentarán métodos para obtener las representaciones en el espacio de estado de sistemas continuos en el tiempo.

Sea el siguiente sistema de orden *n* :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = u \qquad (1)$$

Suponemos que $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son constantes y que el conocimiento de $y(0)$, $y'(0)$, ..., $y^{(n-1)}(0)$, junto con la entrada $u(t)$ para $t \geq 0$, determina totalmente el comportamiento futuro del sistema. Se define

$$x_1 = y$$
$$x_2 = y'$$
$$\ldots$$
$$x_n = y^{(n-1)}$$

Entonces la ecuación (1) se puede escribir como

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_3$$
$$\ldots$$
$$x_{(n-1)}' = x_n$$
$$x_n' = -a_n x_1 - \ldots - a_1 x_n + u$$

o

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + Bu \qquad (2)$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

La salida "y" se puede escribir como

$$y = C\,\mathbf{x}\ , \qquad (3)$$

donde $C = [1, 0, \ldots, 0]$. La ecuación diferencial de primer orden (2), es la ecuación de estado, y la ecuación algebraica (3) es la ecuación de salida.

Una situación más general se presenta si la ecuación diferencial del sistema incluye derivadas de la función excitatriz, por ejemplo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} u' + b_n u \qquad (4)$$

Aquí no es posible emplear el método directo utilizado previamente. Esto es porque n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_3$$
$$\ldots$$
$$x_n' = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \ldots - a_1 x_n + b_0 u^{(n)} + \ldots + b_n u$$

donde $x_1 = y$, quizás no den una solución única.

El problema principal al definir las variables de estado $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para este caso, consiste en los términos derivativos del miembro derecho de la última de las n ecuaciones precedentes. Las variables de estado deben ser tales que eliminen las derivadas de u en la ecuación de estado.

Una forma de obtener una ecuación de estado y una ecuación de salida es definir las siguientes n variables como un conjunto de n variables de estado:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_o u \\
x_2 &= y' - \beta_o u' - \beta_1 u = x_1' - \beta_1 u \\
x_3 &= y'' - \beta_o u'' - \beta_1 u' - \beta_2 u = x_2' - \beta_2 u \\
&\;\;. \; . \; . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (5) \\
x_n &= y^{(n-1)} - \beta_o u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-2} u' - \beta_{n-1} u \\
&= x'_{n-1} - \beta_{n-1} u
\end{aligned}
$$

donde $\beta_o, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ se determinan de

$$
\begin{aligned}
\beta_o &= b_o \\
\beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_o \\
\beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_o \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (6) \\
\beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_o \\
&\;\;. \; . \; . \\
\beta_n &= b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_o
\end{aligned}
$$

Con esta elección de variables de estado queda garantizada la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de estado (hacemos notar que ésta no es la única selección posible de conjunto de variables de estado). Con esta elección de variables de estado, se obtiene

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_2 + \beta_1 u \\
x_2' &= x_3 + \beta_2 u \\
&\;\;. \; . \; . \qquad\qquad\qquad\qquad (7) \\
x_{n-1}' &= x_n + \beta_{n-1} u \\
x_n' &= - a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned}
$$

En términos de ecuaciones vector - matriz, la ecuación (7) y la ecuación de salida pueden escribirse así:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ . & . & . \ldots . \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} \ldots -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \; 0 \ldots 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

o $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + Bu$; $y = C\,\mathbf{x} + \beta o\, u$, donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ . & 0 & . \ldots . \\ 0 & . & 0 \ldots 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} \quad -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$C = [1, 0, \ldots, 0] , \; \beta_0 = b_0$$

La condición inicial $\mathbf{x}(0)$ se puede determinar utilizando (5). En esta representación en el espacio de estado, la matriz A es la misma que la del sistema de la ecuación (1). Las derivadas del miembro derecho de la ecuación (4) afectan únicamente a los elementos de la matriz B.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de estado para el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$y''' + 18y'' + 192\,y' + 640y = 160\,u' + 640\,u.$$

Se puede definir, en referencia a la ecuación (5)

$$x_1 = y - \beta_0 u$$
$$x_2 = y' - \beta_0 u' - \beta_1 u = x_1' - \beta_1 u$$
$$x_3 = y'' - \beta_0 u'' - \beta_1 u' - \beta_2 u = x_2' - \beta_2 u$$

donde β_0, β_1, y β_2 se determinan de la ecuación (6) así:

$$\beta_0 = b_0 = 0$$
$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 = 0$$
$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = 160$$
$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 = 640 - 18(160) = -2240.$$

Entonces la ecuación de estado para el sistema se convierte en

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u$$

La ecuación de salida es

$$y = \begin{bmatrix} 1,0,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2 (Sistema Mecánico). Considere un sistema de masa - resorte - amortiguador montado en un carro, como se ve en la Figura 11.

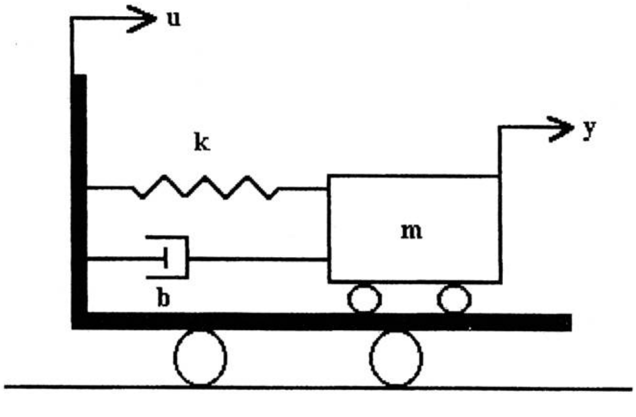


Figura 11

Suponemos que el sistema está en reposo para $t < 0$. En este sistema, $u(t)$ es el desplazamiento del carro y constituye la entrada al sistema. En $t = 0$, el carro se desplaza a velocidad constante, o sea $u' =$ constante. La salida es el desplazamiento $y(t)$ de la masa (desplazamiento respecto al suelo). En este sistema, *m* es la masa, *b* el coeficiente de la fricción viscosa, y *k* designa la constante del resorte. Supóngase que la fuerza de fricción del amortiguador es proporcional a $y' - u'$ y que la fuerza del resorte es proporcional a $y - u$.

Por la segunda ley de Newton:

$$m\,a = \sum F$$

donde m = masa, a = aceleración y F = fuerza. Entonces

$$m\,d^2y/dt^2 = -b\,(dy/dt - du/dt) - k\,(y - u)$$

o bien

$$m\,d^2y/dt^2 + b\,dy/dt + k\,y = b\,du/dt + k\,u$$

La ecuación (8) es el modelo matemático del sistema considerado. Ahora hallamos el modelo en el espacio de estado. Comparemos la ecuación para este sistema

$$y'' + (b/m)\,y' + (k/m)\,y = (b/m)\,u' + (k/m)\,u$$

con la ecuación (4)

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b_o u'' + b_1 u' + b_2 u$$

Vemos que: $a_1 = b/m$, $a_2 = k/m$, $b_o = 0$, $b_1 = b/m$, $b_2 = k/m$.

Por la ecuación (6):

$$\beta_o = b_o = 0$$
$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_o = b/m$$
$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_o = k/m - (b/m)^2$$

Por la ecuación (5):

$$x_1 = y - \beta_o u = y$$
$$x_2 = x_1' - \beta_1 u = x_1' - (b/m)\,u$$

De la ecuación (7):

$$x_1' = x_2 + \beta_1 u = x_2 + (b/m)\,u$$
$$x_2' = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -(k/m)\,x_1 - (b/m)\,x_2 + [(k/m) - (b/m)^2]\,u$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - (\frac{b}{m})^2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1\,,\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Nota: Recordamos que la representación en el espacio de estado no es única, puede haber una infinidad de representaciones para el sistema. Lo que debemos buscar en todo caso es que en el primer miembro aparezca la derivada de una (y sólo una) variable de estado. El segundo miembro es una expresión matemática que relaciona todas las variables y las fuentes. En este segundo miembro no aparece ninguna derivada.

Más precisamente, suponga que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto de variables de estado. Entonces se puede tomar otro conjunto de funciones como variables de estado

$$\bar{x}_1 = X_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\bar{x}_2 = X_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\ldots$$

$$\bar{x}_n = X_n (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

siempre que, para cada conjunto de valores $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ corresponda un conjunto único de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y viceversa . Así que, si $\mathbf{x}$ es un vector de estado, entonces $\mathbf{A}$ donde

$$\mathbf{A} = P\,\mathbf{x}$$

también es un vector de estado, siempre que la matríz P sea no singular, es decir, invertible. Distintos vectores de estado proveen la misma información sobre el comportamiento del sistema.

Ejemplo 3 Considere el sistema definido por

$$y''' + 6\,y'' + 11y' + 6\,y = 6\,u \qquad (8)$$

donde y es la salida y u es la entrada al sistema. Obtengamos dos representaciones del sistema en el espacio de estado.

Primer Representación. Se eligen las variables de estado como

$$x_1 = y$$
$$x_2 = y'$$
$$x_3 = y''$$

Entonces se obtiene

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_3$$
$$x_3' = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

La última de estas tres ecuaciones se obtuvo al resolver la ecuación diferencial original para el término con la derivada más alta y''', y sustituir $y = x_1$, $y' = x_2$, $y'' = x_3$ en la ecuación resultante. Utilizando notación matricial, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \tag{9}$$

La ecuación de salida está dada por

$$y = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{10}$$

En forma más compacta, (9) y (10) se pueden colocar como:

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + Bu \qquad (11)$$
$$y = C\,\mathbf{x} \qquad (12)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0, 0]$$

Segunda Representación. Para conseguirla consideraremos los <u>valores propios</u> de una matriz A n x n. Recordamos que los valores propios de una matriz A n x n, son las raíces de la <u>ecuación característica</u>

$$\det(\lambda I - A) = 0,$$

donde I es la matriz identidad de orden n x n. A los valores propios también se les llama <u>raíces características</u>. Para la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

$$= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

Los valores propios de A, son las raíces de la ecuación característica, o sea -1, -2, y -3.

Hallemos una base del espacio propio del valor propio -1. Sustituimos $\lambda = -1$ en la matriz característica $\lambda I - A$ para obtener el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontramos

$$\{ -x - y = 0 \,;\, -y - z = 0 \,;\, 6x + 11y + 5z = 0 \} \text{ ó } \{ y + z = 0 \,;\, 6x + 11y + 5z = 0 \}$$

El sistema tiene una sola solución independiente, por ejemplo $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$. Haciendo lo mismo para $\lambda = -2$ y $\lambda = -3$ hallamos una solución independiente por valor, por ejemplo $x = 1$, $y = -2$, $z = 4$; $x = 1$, $y = -3$, $z = 9$, respectivamente.

Consideramos la matriz P cuyas columnas son los tres vectores propios independientes:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Definimos un nuevo conjunto de variables de estado Z_1, Z_2, Z_3 mediante la transformación

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{x} = \mathrm{P}\,\mathbf{z} \qquad (13)$$

Al reemplazar la ecuación (13) en la ecuación (11) se tiene

$$\mathrm{P}\,\mathbf{z}' = \mathrm{A}\,\mathrm{P}\,\mathbf{z} + \mathrm{B}\,\mathrm{u}$$

Como P es no singular, P^{-1} existe y multiplicando ambos miembros de esta última ecuación por P^{-1}, se tiene

$$Z' = P^{-1}\,A\,P\,\mathbf{z} + P^{-1}\,B\,u \qquad (14)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

Simplificando, se tiene

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u \qquad (15)$$

La expresión (15) también es una ecuación de estado, que describe el mismo sistema definido en (9).

La ecuación de salida (12), se modifica por

$$y = CPZ$$

o

$$y = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$= [1, 1, 1] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Note que la matriz de transformación P, transforma la matriz de coeficientes **z** en la matriz diagonal. Vemos de (15), que las tres ecuaciones de estado escalares, están desacopladas. Nótese también que los elementos diagonales de la matriz $P^{-1}AP$, son idénticos a los tres valores propios de A. Para fines de estabilidad o inestabilidad es importante notar que los valores propios de A y los de $P^{-1}AP$, son idénticos. Cerraremos esta sección con un estudio de lo que estamos diciendo.

Estabilidad e Inestabilidad de un sistema.

Analizaremos la solución de la ecuación de estado dada por (11). Primero se considerará la solución natural o no forzada, es decir, $u(t) = 0$. Así, (11) se simplifica y se tiene

$$\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t) \qquad (17)$$

Con frecuencia, la versión escalar del problema vectorial es un buen indicador de la solución correcta. En este caso, la versión escalar de (17) es

$$x'(t) = a\,x(t),$$

cuya solución es $x'(t) = e^{at}\,x(0)$. Supóngase que la solución de (17) se trata de la misma manera, es decir,

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\,\mathbf{x}(0) \qquad (18)$$

en donde e^{At} es función de la matriz A que se define como la matriz n x n.

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} (t^k A^k / k!)$$

Existen varias formas (incluida una con métodos numéricos y computación) de calcular (19); por el momento nos limitaremos a indicar qué entendemos en (19).

En general, la ecuación característica de una matriz cuadrada A n x n es

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \det(A - \lambda i) \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \end{aligned} \qquad (20)$$

El teorema de Cayley-Hamilton establece que

$$g(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0 \qquad (21)$$

La ecuación (21) puede escribirse como

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_1 A - a_0 I \qquad (22)$$

Así, A^n puede expresarse en términos de las matrices A^{n-1}, A^{n-2}, ... , A e I. Si multiplicamos (22) por A, obtenemos

$$A^{n+1} = -a_{n-1}A^n - a_{n-2}A^{n-1} - \ldots - a_1 A^2 - a_0 A. \qquad (23)$$

Es claro que si sustituimos (22) en (23), veremos que A^{n+1} se puede expresar, de nuevo, en términos de A^{n-1}, A^{n-2}, ... , A, e I. Repitiendo este proceso, se observa que se puede representar cualquier potencia de A como una suma ponderada de matrices que incluya a A para potencias 0, 1, ..., n-1. Por tanto, podemos indicar que

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j \qquad (24)$$

Si (18) es solución de (17), entonces debe satisfacer (17). Esto se comprueba si

$$d/dt\,[e^{At}\mathbf{x}(0)] = A\,e^{At}\mathbf{x}(0).$$

Sustituyendo e^{At} y derivando término a término con respecto a t se tiene

$$\Big[\sum_{k=1}^{\infty} (t^{k-1} A^k/(k-1)!\,\Big]\,\mathbf{x}(0) = A\Big[\sum_{k=0}^{\infty} (t^k A^k/k!)\Big]\,\mathbf{x}(0)$$

Tomando j = k - 1 en la suma del primer miembro, se ve que

$$\Big[\sum_{j=0}^{\infty} (t^j A^{j+1}/j!\,\Big]\,\mathbf{x}(0) = A\Big[\sum_{k=0}^{\infty} (t^k A^k/k!\,\Big]\,\mathbf{x}(0)$$

La última ecuación establece la identidad requerida. Así que (18) es la solución de (17). Para calcular el vector $\mathbf{x}(0)$ se evalúa (18) para determinada t_o para la cual se conoce $x(t)$ obteniéndose

$$x(t_o) = e^{Ato}\mathbf{x}(0) \qquad (25)$$

Multiplicando (25) por la matriz inversa de e^{Ato}, es decir, $(e^{Ato})^{-1}$ obtenemos:

$$\mathbf{x}(0) = (e^{Ato})^{-1}\mathbf{x}(t_o)$$

Puede demostrarse que $(e^{Ato})^{-1} = e^{-Ato}$. Así

$$\mathbf{x}(0) = e^{-Ato}\mathbf{x}(t_o) \qquad (26)$$

Sustituyendo (26) en (18) se tiene que la solución homogénea es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{At} e^{-Ato} \mathbf{x}(t_o) \\ &= e^{At-Ato} \mathbf{x}(t_o) \\ &= e^{A(t-to)} \mathbf{x}(t_o) \qquad (27)\end{aligned}$$

donde empleamos que $e^{At} e^{-Ato} = e^{At-Ato}$, válida ya que A y -A son conmutativas. Para encontrar la solución completa de (11) se debe conocer una solución particular de la ecuación diferencial. Para encontrar dicha solución particular se supone una solución de la forma

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{At} \mathbf{q}(t) \qquad (28)$$

donde $\mathbf{q}(t)$ es una función desconocida que se va a determinar (este método se llama de variación de parámetros). El vector $\mathbf{q}(t)$ desconocido se obtiene por sustitución en (11).

$$\mathbf{x}_p'(t) = A\,\mathbf{x}_p(t) + B\,\mathbf{u}(t)$$

$$A e^{At} q(t) + e^{At} q'(t) = A e^{At} q(t) + B\,\mathbf{u}(t)$$

Así,

$$q'(t) = e^{-At} B\,\mathbf{u}(t)$$

Integrando:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{-As} B\,\mathbf{u}(s)\,ds$$

De este modo, la solución particular o forzada es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_p(t) &= e^{At} \mathbf{q}(t) \\ &= e^{At} \mathbf{q}(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-s)} B\,\mathbf{u}(s)\,ds\end{aligned}$$

Para evaluar $\mathbf{q}(t_o)$ se emplea la solución completa.

Así se obtiene

$$\mathbf{x}(t)\big|_{t=to} = \left[e^{A(t-to)}\mathbf{x}(t_o) + e^{At}\, q(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-s)} B\,\mathbf{u}(s)\,ds \right]\Big|_{t=to}$$

Lo que implica que $\mathbf{q}(t_o) = \mathbf{0}$. Por lo tanto, la solución completa de la ecuación de estado (11) es

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-to)}\mathbf{x}(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-s)} B\,\mathbf{u}(s)\,ds \qquad (29)$$

La salida correspondiente es

$$\mathbf{y}(t) = c\,\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = c\,e^{A(t-to)}\mathbf{x}(t_o) + \int_{t_o}^{t} c\,e^{A(t-s)} B\,\mathbf{u}(s)\,ds \qquad (30)$$

Ejemplo 4. Evaluar e^{At} para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos en primer lugar los valores propios de A a partir de la ecuación característica.

$$g(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 6) = 0$$

Así, los valores propios de A son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$. Por (24) se sabe que

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 \qquad (31)$$

Analizando nuevamente la ecuación característica de la matriz A, puede verse que para valores propios distintos $\lambda 1, \lambda 2, \ldots, \lambda n$ (A una matriz n x n), αo, $\alpha 1$, ... pueden determinarse resolviendo para las αs el siguiente sistema

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_1+\alpha_2(t)\lambda_1^{\,2}+\ldots+\alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{\,n-1}=e^{\lambda_1 t}\\
&\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_2+\alpha_2(t)\lambda_2^{\,2}+\ldots+\alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{\,n-1}=e^{\lambda_2 t}\\
&\ldots\\
&\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_n+\alpha_2(t)\lambda_n^{\,2}+\ldots+\alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{\,n-1}=e^{\lambda_n t}
\end{aligned} \tag{32}
$$

Por lo tanto, las constantes α_0, α_1 y α_2 en (31) pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (ver (32))

$$
\begin{aligned}
e^{3t} &= \alpha_0+3\alpha_1+9\alpha_2\\
e^{2t} &= \alpha_0+2\alpha_1+4\alpha_2\\
e^{-3t} &= \alpha_0-3\alpha_1+9\alpha_2
\end{aligned} \tag{33}
$$

de aquí:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= -e^{-3t}+(9/5)e^{2t}+(1/5)e^{-3t}\\
\alpha_1 &= (1/6)e^{3t}-(1/6)e^{-3t}\\
\alpha_2 &= (1/6)e^{3t}-(1/5)e^{2t}+(1/30)e^{-3t}
\end{aligned} \tag{34}
$$

Así, la matriz e^{At} es

$$
\mathbf{e}^{\mathbf{At}} = \boldsymbol{\alpha}_0\mathbf{I}+\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{A}+\boldsymbol{\alpha}_2\ \mathbf{A}^2
$$

$$
= \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\beta_1 & 0 & 0\\ 0 & -2\beta_2 & \beta_1\\ 0 & 4\beta_1 & \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9\beta_2 & 0 & 0\\ 0 & 8\beta_2 & -\beta_2\\ 0 & 4\beta_2 & 5\beta_2 \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5e^{3t} & 0 & 0\\ 0 & e^{2t}+4e^{-3t} & e^{2t}-e^{-3t}\\ 0 & 4(e^{2t}-e^{-3t}) & 4e^{2t}+e^{-3t} \end{bmatrix}
$$

Si, por ejemplo, el estado en t = 0 es

$$\mathbf{x(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces para u (t) = 0, el estado en el tiempo t es

$$\mathbf{x(t)= e^{At}x(0)} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5e^{3t} \\ 2e^{2t}+ 3e^{-3t} \\ 8e^{2t}- 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

En el ejemplo anterior se encontró la expresión general para el estado de un sistema si se dan la matriz de estado A y el estado inicial **x** (0). Una de las primeras cosas que se deben verificar es que las señales internas del sistema permanezcan dentro de los límites en que el sistema es estable. Se observa que los estados anteriores crecen ilimitadamente como e^{3t} y e^{2t}. Por tanto, este sistema en particular es inestable y en consecuencia, se debe comprobar la viabilidad del modelo. Después de haber realizado algunos cálculos como éstos, la pregunta que surge es si no habrá alguna manera más fácil de examinar la estabilidad del sistema dada la matriz de estado A, la respuesta es sí. Se puede comprobar si el sistema es estable o inestable sin la necesidad de conocer en detalle el comportamiento del estado y la salida. Es el conjunto de valores propios de A lo que determina el comportamiento del sistema.
Como se mencionó antes, los valores propios de A son los mismos que los de la matriz $P^{-1} A P$ para cualquier matriz P n x n cuya inversa exista. Supóngase ahora, por conveniencia, que los valores propios de la matriz de estado A son distintos. Entonces existe una matriz no singular tal que

$$\mathbf{p^{-1}AP = D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdot\cdot 0 \\ \dots & \\ 0 & 0 \dots \lambda_n \end{bmatrix}$$

Como $A = PD P^{-1}$, sustituyendo en la definición para e^{At} se tiene que

$$e^{At} = [\sum^{\infty} t^k A^k / k!]$$

$$k = 0$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} t^k (PDP^{-1})^k / k! \right]$$

$$= P \left[\sum_{k=0}^{\infty} t^k D^k / k! \right] P^{-1}$$

La matriz $\left[\sum_{k=0}^{\infty} t^k D^k / k! \right]$ es simplemente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2^k \cdots 0 \\ \cdots & \\ 0 & 0 \ldots \lambda_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \ldots 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \ldots 0 \\ \cdots & \\ 0 & 0 \ldots e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \ldots 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \ldots 0 \\ \cdots & \\ 0 & 0 \ldots e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \tag{35}$$

En consecuencia, los elementos de e^{At}, y por tanto las entradas de **x** (t), se componen de sumas de las funciones $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$, ... , $e^{\lambda_n t}$. Si cualquiera de estas funciones crece ilimitadamente, el sistema es inestable; tal crecimiento ocurrirá si la parte real de cualquiera de los eigenvalores es mayor que cero. Además, si la parte real de cualquiera de los eigenvalores es cero, se puede encontrar una entrada limitada que haga que la integral (29) no tenga límite. Por el contrario, si las partes reales de todos los eigenvalores son menores que cero, la solución permanecerá limitada para todas las entradas limitadas. De lo anterior se concluye que:

Un sistema de tiempo continuo es estable si y sólo si todos los eigenvalores de la matriz de estado tienen parte real menor que cero.

Ejemplo 5 Dado un sistema de tiempo continuo cuya matriz de estado es

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

¿Para qué rango de valores de α y β es estable el sistema (suponiendo que α y β son reales)?

La ecuación característica para A es

$$g(\lambda) = (\alpha - \lambda)[(\beta - \lambda)(-2 - \lambda) + 1] = 0$$

es decir,

$$(\alpha - \lambda)[\lambda^2 + \lambda(2 - \beta) + 1 - 2\beta] = 0 \qquad (36)$$

Las raíces de (36) son

$$\lambda_1 = \alpha,\ \lambda_2 = (\beta - 2)/2 + (\beta(\beta + 4))^{1/2}/2,\ \lambda_3 = (\beta - 2)/2 - (\beta(\beta + 4))^{1/2}/2$$

Es claro que, para la estabilidad, se debe tener $\alpha < 0$. Al investigar el rango de β para la estabilidad se tienen dos casos.

Caso 1. λ_2 y λ_3 son complejos para $-4 < \beta < 0$. En este caso se debe tener $(\beta - 2)/2 < 0$, lo cual significa que $\beta < 2$. Así, el sistema es estable para todo β en el rango $-4 < \beta < 0$.

Caso 2. λ_2 y λ_3 son reales para $\beta \leq -4$ ó $\beta \geq 0$. Puesto que $\lambda_2 \geq \lambda_3$, se hace

$$\lambda_2 = (\beta - 2)/2 + (\beta^2 + 4\beta)^{1/2}/2 < 0$$

Así, se tiene que

$$(2 - \beta) > (\beta^2 + 4\beta)^{1/2}$$

de donde se obtiene $\beta < 1/2$. Así que el sistema es estable para todo $\alpha < 0$ y $\beta \leq -4$ ó $0 \leq \beta < 1/2$.

2. Análisis de Fourier

2.1 Series de Fourier

Ahora estudiaremos cómo formas de onda no senosoidales pueden expresarse como una suma de componentes senoidales, cada una con distinta frecuencia, amplitud y desplazamiento de fase. Excepto en casos especiales, es necesario, teóricamente un número infinito de componentes. Por el contrario, prácticamente, suelen resultar suficientes unos cuantos términos para conseguir una aproximación razonable a la onda no senoidal deseada. Esto tiene gran importancia y aplicación en el estudio de sistemas. Más concretamente, la serie de Fourier proporciona un método para descomponer una forma de onda periódica complicada en un número de simples sinusoides, con las que, generalmente, ya sabemos trabajar. El principio de superposición permite sumar todas estas respuestas para obtener la respuesta a la entrada no senoidal.

Siempre que trabajemos con una fuente periódica no senoidal excitando a un sistema lineal, debemos responder dos preguntas importantes:

1) ¿Tiene la onda no senoidal una serie de Fourier equivalente?
2) En caso de ser afirmativa la primer pregunta, ¿qué valor tendrán la magnitud, frecuencia y fase de cada componente?

La respuesta a la primer pregunta es que toda forma de onda $f(t)$ con periodo T tiene una serie de Fourier si cumple las siguientes dos condiciones (llamadas condiciones de Dirichlet):

a) $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades de salto, así como de máximos y mínimos en un periodo T.
b)

$$\int_{d}^{d+T} |f(t)|\, dt < +\infty, \quad \text{para todo d.}$$

Estas condiciones son suficientes, pero no necesarias.

En relación a la segunda pregunta, si f satisface las condiciones de Dirichlet, entonces la serie

$$(a_o / 2) + [\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos (n \omega_o t) + b_n \operatorname{sen} (n \omega_o t))] \qquad (1)$$

donde $\omega_o = 2\pi/T$, converge a f (t) en todos los puntos donde f es continua, y converge a

$$(½) [\lim_{h\to 0^+} f(t+h) + \lim_{h\to 0^-} f(t+h)]$$

si f es discontinua en t.

Nota. 1) La serie (1) se llama serie de Fourier de f y los coeficientes a_o, a_n, b_n; n = 1, 2, ... , se llaman coeficientes de Fourier.

2) $\omega_o = 2\pi / T$ se conoce como frecuencia fundamental y $\omega_n = n\, \omega_o$ se llama n-ésima armónica.

De una manera muy informal (sin preocuparnos en los intercambios de la sumatoria y la integral) veamos cómo es el cálculo de los coeficientes de Fourier.

De las identidades

$$\operatorname{sen} A \cos B = 1/2 [\operatorname{sen} (A + B) + \operatorname{sen} (A - B)]$$
$$\cos A \cos B = 1/2 [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$$
$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = 1/2 [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$$

es fácil ver que

a) $$\int_{-T/2}^{T/2} \cos (m\, \omega_o t)\, d t = 0 \text{ , para todo } m \neq 0.$$

b) $$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen} (n\, \omega_o t)\, d t = 0 \text{ , para todo m.}$$

c) $$\int_{-T/2}^{T/2} (\cos(m\,\omega_o t))(\cos(n\,\omega_o t))\,dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \end{cases}$$

d) $$\int_{-T/2}^{T/2} (\mathrm{sen}(m\,\omega_o t))(\mathrm{sen}(n\,\omega_o t))\,dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \end{cases}$$

e) $$\int_{-T/2}^{T/2} (\mathrm{sen}(m\,\omega_o t))(\cos(n\,\omega_o t))\,dt = 0$$, para todo m y n.

Para hallar a_o, suponemos que en

$$f(t) = (a_o/2) + [\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\,\omega_o t) + b_n(\mathrm{sen}\, n\,\omega_o t))] \qquad (2)$$

podemos integrar término a término. Entonces

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = (a_o/2)\int_{-T/2}^{T/2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\,\omega_o t)\,dt + b_n \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{sen}(n\,\omega_o t)\,dt]$$

$$= (a_o/2)\,T,$$

de aquí: $$a_o = (2/T)\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt.$$

Para hallar a_m ($m = 1, 2, ...$) multiplicamos los dos miembros de (2) por $\cos(m\,\omega_o t)$, y suponiendo justificada la integración término a término tenemos:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(m\,\omega_o t)\,dt = (a_o/2)\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\,\omega_o t)\,dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-T/2}^{T/2}(\cos(m\,\omega_o t))(\cos(n\,\omega_o t))\,dt+b_n\int_{-T/2}^{T/2}(\cos(m\,\omega_o t))(\operatorname{sen}(n\,\omega_o t))\,dt\right]$$

$= a_m(T/2)$,

de aquí: $a_m = (2/T)\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(m\,\omega_o t)\,dt.$

El cálculo de b_m ($m = 1,2, \ldots$) es similar. En general, no es necesario que el intervalo de integración sea simétrico alrededor del origen. Si una función g tiene periodo T puede verse que

$$\int_{-T/2+d}^{T/2+d} g(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,dt,$$

por lo tanto, el único requisito es que la integral se tome sobre un periodo completo. Otra observación pertinente antes de anotar las fórmulas de a_o, a_n, b_n, es el hecho de que a_o puede hallarse de a_n, tomando $n = 0$; en realidad esta es la razón por la cual en (1) hemos puesto $a_o/2$ y no a_o simplemente. Tenemos entonces que

$$a_n = (2/T)\int_{-T/2+d}^{T/2+d} f(t)\cos(n\,\omega_o t)\,dt;\quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

y

$$b_n = (2/T)\int_{-T/2+d}^{T/2+d} f(t)\operatorname{sen}(n\,\omega_o t)\,dt;\quad n = 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

Ejemplo 1. Encontrar la serie de Fourier para la función *f* definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -T/2 \leq t < 0 \\ A \operatorname{sen}(\omega_o t), & 0 \leq t < T/2, \end{cases}$$

donde $f(t+T) = f(t)$, $\omega_o = 2\pi / T$, A es una constante. Tenemos:

$$a_o = (2/T) \int_0^{T/2} A \operatorname{sen}(\omega_o t)\, dt$$

$$= (2a / T\omega_o)\left(-\cos(\omega_o t) \Big|_0^{T/2}\right)$$

$$= (A/\pi)(1 - \cos(\pi)) = 2A/\pi$$

$$a_n = (2/T) \int_0^{T/2} A \operatorname{sen}(\omega_o t) \cos(n\,\omega_o t)\, dt$$

$$= (A/T) \int_0^{T/2} \{\operatorname{sen}[(1+n)\,\omega_o t] + \operatorname{sen}[(1-n)\,\omega_o t]\}\, dt$$

Si $n = 1$,

$$a_1 = (A/T) \int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\,\omega_o t)\, dt = -(A/(2\,\omega_o T)) \cos(2\,\omega_o t) \Big|_0^{T/2}$$

$$= (A / 4\pi)[1 - \cos(2\pi)] = 0$$

Si $n = 2, 3, \ldots$

$$a_n = (A/T)\{-\cos[(1+n)\,\omega_o t] / ((1+n)\,\omega_o) - \cos[(1-n)\,\omega_o t]/((1-n)\,\omega_o)\} \Big|_0^{T/2}$$

$$= (A / 2\pi) \{(1 - \cos (1 + n) \pi)/ (1 + n) + (1 - \cos (1 - n) \pi) / (1 - n)\}$$

$$= \begin{cases} (A / 2\pi) (2 / (1 + n) + 2 / (1 - n)), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Análogamente

$$b_n = (2 / T) \int_0^{T/2} A \,\text{sen} (\omega_o t) \,\text{sen} (n \omega_o t) \, dt$$

$$= (A / T) \int_0^{T/2} \{\cos [(1 - n) \omega_o t] - \cos [(1 + n) \omega_o t]\} \, dt$$

Si $n = 1$:

$$b_1 = (A / T) \int_0^{T/2} dt - (A / T) \int_0^{T/2} \cos (2 \omega_o t) \, dt$$

$$= A / 2 - (A / T) \cdot (1/2\omega_o) \text{sen}\, 2 \omega_o t \Big|_0^{T/2} = A / 2$$

Si $n = 2, 3, \ldots$

$$b_n = (A / T) \{\text{sen} [(1 - n) \omega_o t] /((1 - n) \omega_o) - \text{sen} [(1 + n) \omega_o t] / ((1 + n) \omega_o)\} \Big|_0^{T/2}$$

$$= (A /2\pi) \{(\text{sen} (1 - n) \pi - \text{sen}\, 0)/(1 - n) - (\text{sen} (1 + n) \pi - \text{sen}\, 0)/(1 + n)\}$$

$$= 0 ,$$

Así, ya que f es continua en $[-T/2, T/2]$, obtenemos que

$$f(t) = A/\pi + (A/2) \,\text{sen} (\omega_o t) - (2 A / \pi) [(1/(1 \cdot 3)) \cos (2\omega_o t) + (1/ (3 \cdot 5)) \cos (4\omega_o t) + (1/(5 \cdot 7)) \cos (6 \omega_o t) + \ldots] ,$$

pues para n par:

$$a_n = (A/2\pi)(2/(1+n) + 2/(1-n)) = -(2A/\pi) \cdot (1/((n-1)(n+1))$$

Ejemplo 2. (Aplicación al cálculo de sumas de series convergentes)

En el ejemplo anterior con $t = 0$:

$$A \operatorname{sen}(0) = A/\pi + (A/2)\operatorname{sen}(0) - (2A/\pi)[(1/(1 \cdot 3))\cos(0) + (1/(3 \cdot 5))\cos(0) + \ldots]$$

Por tanto,

$$(2A/\pi)(1/(1 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 5) + \ldots) = A/\pi,$$

luego

$$1/(1 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 5) + \ldots = 1/2.$$

Ejemplo 3. Desarrollar $f(t) = \operatorname{sen}^5(t)$ en serie de Fourier (uso de la variable compleja).

Como

$$\cos(t) = (e^{it} + e^{-it})/2 \quad y \quad \operatorname{sen}(t) = (e^{it} - e^{-it})/2i,$$

entonces:

$$\operatorname{sen}^5 t = ((e^{it} - e^{-it})/2i)^5$$

$$= 1/(32i)[e^{5it} - 5e^{3it} + 10e^{it} - 10e^{-it} + 5e^{-3it} - e^{-5it}]$$

$$= (5/8)\operatorname{sen}(t) - (5/16)\operatorname{sen}(3t) + (1/16)\operatorname{sen}(5t).$$

En este caso la serie de Fourier tiene tres términos solamente.

Coeficientes de Fourier de señales simétricas.

Ocasionalmente el trabajo en la determinación de los coeficientes (3) y (4) se facilita por trabajar con funciones *f* pares o impares, esto es

Definición. Sea f una función con dominio simétrico respecto al origen.

a) f es <u>par</u> si $f(t) = f(-t)$, para todo $t \in D_f$.

b) f es <u>impar</u> si $f(-t) = -f(t)$, para todo $t \in D_f$.

Gráficamente, si f es par su gráfica es simétrica con respecto a $x = 0$; si f es impar su gráfica es simétrica con respecto a $(0,0)$.

Los dos hechos más importantes (para nosotros) de las funciones pares e impares los presentamos en la siguiente

PROPOSICION. a) Sea f una función par. Si $[-a, a] \subset D_f$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt,$$

por otro lado, si f es una función impar

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$$

b) El producto de dos funciones pares o de dos funciones impares es una función par, mientras que el producto de una función par con una función impar es una función impar.

Con esto en mente haremos el cálculo de los coeficientes a_n, b_n.

Suponemos en lo que sigue que f es una función con periodo T, acotada y que satisface las condiciones de Dirichlet.

1. Sea f una función par

$$a_n = (2/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\,\omega_0\, t)\, dt$$

$$= (4/T) \int_{0}^{T/2} f(t) \cos(n\,\omega_0\, t)\, dt;\quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

$$b_n = (2/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \,\mathrm{sen}(n\,\omega_0\, t)\, dt = 0$$

La serie de Fourier queda:

$$(1/2)\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,\omega o\, t),\ \omega o = 2\pi / T \qquad (6)$$

La serie (6) se conoce como serie coseno de Fourier de f (t), donde a_n se calculan por (5).

2. Sea f una función impar

De manera análoga al caso anterior, aquí $a_n = 0$, n = 0, 1, 2, ..., la serie de Fourier de f (t) queda como

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathrm{sen}(n\,\omega_0\, t) \qquad (7),$$

conocida como serie seno de Fourier de f (t), donde

$$b_n = (4/T) \int_{0}^{T/2} f(t) \,\mathrm{sen}(n\,\omega_0\, t)\, dt \qquad (8)$$

Expansiones de medio rango

Una función no periódica, definida en cierto intervalo finito (0,M), se puede desarrollar en serie de Fourier. Hay varias formas de hacer esto, pero presentamos las dos más frecuentes. Representamos a f(t) por medio de una serie coseno o seno de Fourier, lo cual se puede hacer construyendo una función periódica que sea idéntica a f(t) en (0,M), y que satisfaga las condiciones de simetría que conduzcan a la forma deseada de las series de Fourier.

1. Extensión par de f (t)

Es la función par $f_p(t)$ con periodo $T = 2M$, definida por

$$f_p(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < M \\ f(-t), & -M < t < 0 \end{cases}$$

La serie de Fourier ("coseno" en este caso) que representa a f (t) es

$$(1/2)\, a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\, \omega_o t), \quad \omega_o = 2\pi / T = \pi / M ,$$

esto es,

$$(1/2)\, a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\, \pi\, t / M) \qquad (9)$$

donde (según (5))

$$a_n = (4 / T) \int_0^{T/2} f(t) \cos n\, (\pi / M)\, t \; dt ,$$

es decir,

$$a_n = (2 / M) \int_0^{M} f(t) \cos(n\, \pi\, t / M)\, dt \qquad (10),$$

ya que T = 2 M.

2. Extensión impar de f (t).

Es la función impar $f_i(t)$ con periodo T = 2 M, definida por

$$f_i(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < M \\ 0, & t = 0 \\ -f(-t), & -M < t < 0 \end{cases}$$

La serie de Fourier ("seno" en este caso) que representa a f (t) es

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n \pi t / M) \qquad (11),$$

donde

$$b_n = (2/M) \int_0^M f(t) \operatorname{sen}(n \pi t / M)\, dt \qquad (12)$$

NOTAS. a) Las series (9) y (11) representan la misma función f (t) en (0,M), fuera de este intervalo, la serie representará la extensión periódica par o impar respectivamente de f (t).

b) Obsérvese que el cálculo de los coeficientes (10) y (12) no requieren de $f_p(t)$ ni de $f_i(t)$, respectivamente, sino únicamente de la función dada f (t).

Ejemplo 4. Dada la función

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq \pi/2 \\ 1, & \pi/2 < t < \pi \end{cases}$$

desarrollar f (t) en una serie de Fourier de términos del coseno.

Usamos (9) y (10).

$$a_n = (2/\pi) \int_0^{\pi} f(t) \cos(n t)\, dt$$

$$= (2/\pi) \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(n t)\, dt$$

$$= (2/n\pi) \operatorname{sen}(n t) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \quad ; n \neq 0$$

$$= -(2/n\pi) \operatorname{sen}(n\pi/2),$$

esto es,

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par}; n \neq 0 \\ -2/(n\pi), & n = 1, 5, \dots \\ 2/(n\pi), & n = 3, 7, \dots \end{cases}$$

Para n = 0,

$$a_0 = (2/\pi) \int_{\pi/2}^{\pi} dt = 1.$$

Así:

$f(t) = 1/2 - (2/\pi)(\cos(t) - (1/3)\cos(3t) + (1/5)\cos(5t) - \dots)$, $0 < t < \pi$, $t \neq \pi/2$. La convergencia de la serie en $t = \pi/2$ es: 1/2.

Forma compleja de la serie de Fourier.

Frecuentemente es útil expresar las series de Fourier en términos de los exponentes complejos $\text{Exp}[\pm i n \omega_o t]$.

Si $f(t)$ es una función periódica acotada (con periodo T), hemos visto que su serie de Fourier queda

$$(1/2)\, a_o + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n \omega_o t) + b_n \operatorname{sen}(n \omega_o t)] \qquad (13),$$

donde $\omega o = 2\pi / T$. Ya que

$$\cos(n\,\omega_o\,t) = (1/2)\,(e^{i n \omega o t} + e^{-i n \omega o t}) \qquad (14)$$

y

$$\operatorname{sen}(n\,\omega_o\,t) = (1/(2i))\,(e^{i n \omega o t} + e^{-i n \omega o t}) \qquad (15)$$

sustituyendo (15) y (14) en (13) obtenemos:

$$(1/2)\,a_o + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \bullet (1/2)(e^{i n \omega o t} + e^{-i n \omega o t}) + b_n \bullet (1/(2i))\,(e^{i n \omega o t} - e^{-i n \omega o t})]$$

$$= a_o / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(1/2)\,(a_n - i\,b_n)\,e^{i n \omega o t} + (1/2)\,(a_n + i\,b_n)\,e^{-i n \omega o t}]$$

Si ponemos $C_o = a_o/2$, $C_n = (a_n - i\,b_n)/2$, $C_{-n} = (a_n + i\,b_n)/2$, entonces (nótese que $C_{-n} = C_n$) hallamos

$$C_o + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n\,e^{i n \omega o t} + C_{-n}\,e^{-i n \omega o t}]$$

$$= C_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,e^{i n \omega o t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n\,e^{i n \omega o t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\,e^{i n \omega o t},$$

donde

$$C_o = a_o/2 = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \qquad (16)$$

$$C_n = (½)(a_n - i\,b_n)$$

$$= (1 / T) \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n \omega_o t)\, dt - i \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(n \omega_o t)\, dt \right]$$

$$= (1 / T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \left[\cos(n \omega_o t) - i \operatorname{sen}(n \omega_o t)\right] dt$$

$$= (1 / T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i n \omega o t}\, dt \qquad (17),$$

análogamente

$$C_{-n} = (1/2)(a_n + i b_n) = (1 / T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{i n \omega o t}\, dt \qquad (18)$$

En conclusión, la serie compleja de Fourier de f (t) queda expresada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n \omega o t} \qquad (19),$$

donde C_n, combinando (16) - (18) en una sola fórmula, es

$$C_n = (1 / T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i n \omega o t}\, dt \ ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (20)$$

Ya que $f(t)\, e^{-i n \omega o t}$ es una función periódica con periodo T, C_n también puede calcularse con:

$$C_n = (1/T) \int_{-T/2 + d}^{T/2 + d} f(t)\, e^{-i n \omega o t}\, dt \qquad (21)$$

Aplicaciones

Como puede verse con facilidad, muchos de los conceptos desarrolladas en la mecánica, electricidad y electrónica son aplicables a funciones periódicas que sean senos y cosenos simples, por lo tanto, para abordar un problema con otro tipo de fuerza "impulsora" f (t) el primer paso debe ser expresar dicha fuerza en términos de tales funciones, es decir, el primer paso debe ser determinar su serie de Fourier.

En las siguientes aplicaciones tomaremos el trabajo hecho en otros campos. Nos concretaremos básicamente a aplicar los conceptos hasta aquí estudiados, dando solución a los problemas ya planteados.

Ejemplo 5. Contenido de potencia de una señal periódica.

Con frecuencia una caracterización de cierta señal es la potencia de su forma de onda. La potencia promedio disipada por ciclo de la corriente eléctrica I = f (t) que fluye por una resistencia R es (potencia = (voltaje)(corriente)):

$$P = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} E \bullet I \, dt = (R / T) \int_{-T/2}^{T/2} I^2 \, dt \qquad (22)$$

(Ley de Ohm: E = RI). Puede verse que

$$P = I^2_{rms} R \qquad (23),$$

una forma análoga aplicable a la corriente directa, donde el valor de la corriente llamada raíz cuadrada - media o r m s (root - mean - square) de la función I = f (t) sobre un intervalo (a , b) se define como

$$f(t)_{rms} = \left(\int_a^b f^2(t) \, dt \, / (b - a) \right)^{1/2} \qquad (24)$$

Si

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} \quad ,$$

entonces

$$(R/T)\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt = (R/T)\int_{-T/2}^{T/2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} f(t)\,dt\right]$$

$$= R\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\left[(1/T)\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{in\omega_0 t}\,dt\right]$$

$$= R\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_{-n} \qquad \text{(véase (20))} ,$$

luego el rms de $I = f(t)$ sobre el intervalo $(-T/2, T/2)$ es:

$$I_{rms} = \left((1/T)\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2\right)^{1/2} \qquad (25)$$

(esto se conoce como <u>teorema</u> <u>de</u> <u>Parseval</u>). De (23) y (25):

$$P = R\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \qquad (26),$$

de (26) vemos que el contenido de potencia de una señal periódica depende solamente de la amplitud de sus armónicas y no de sus fases.

La ecuación (26) indica que la potencia de $f(t)$ se puede calcular sumando todas las potencias asociadas a cada componente de la frecuencia de $f(t)$. La potencia asociada con la componente de frecuencia en $n\,\omega_0$ radianes es $|C_n|^2 R$ y la asociada con $-n\,\omega_0$ es $|C_{-n}|^2 R$. Se debe recordar que en la representación (19) se usan ambas componentes de frecuencia en $\pm n\,\omega_0$ para formar una sola armónica real. Así, la potencia de la n-ésima armónica real de $f(t)$ es

$$p_n = R\,[\,|C_n|^2 + |C_{-n}|^2\,] = 2\,|C_n|^2\,R \qquad (27)$$

La ecuación (27) es la potencia en la función del tiempo

$$C_n e^{i n \omega o t} + C_{-n} e^{-i n \omega o t}$$

$$= |C_n|\, e^{i(n \omega o t + \theta n)} + |C_n|\, e^{-i(n \omega o t + \theta n)}$$

$$= 2\,|C_n| \cos(n\,\omega_o\, t + \theta_n) \qquad (28),$$

donde θ_n es el argumento a fase de C_n (nótese que $-\theta_n$ es la fase de $C_{-n} = C_n$).

Puesto que la potencia en $A \cos(\omega\, t + \varnothing)$ es $A^2 R / 2$, entonces la potencia en $2\,|C_n| \cos(n\,\omega_o\, t + \theta_n)$ es $2\,|C_n|^2 R$, como se ve en (27). Resumiendo: La potencia de $f(t)$ se puede calcular en el dominio de la frecuencia, calculando la potencia de cada componente de frecuencia de $f(t)$. Una vez hecho esto se suman estas potencias para obtener la potencia total P.

Ejemplo 6. ¿Qué porcentaje de la potencia total está contenida hasta el primer cruce en cero de la envolvente del espectro de frecuencias de $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1\,, & 0 \le t \le 1/40 \text{ ó } 9/40 \le t \le 1/4 \\ 0\,, & 1/40 < t < 9/40\,, \end{cases}$$

$T = 1/4$?

Tenemos que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n \omega o t}\,, \quad \omega_o = 8\pi\,.$$

Aquí

$$C_n = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i n \omega o t}\, dt$$

Tenemos

$$C_n = 4 \int_{-1/8}^{1/8} f(t)\, e^{-in\omega o t}\, dt$$

$$= 4 \int_{-1/40}^{1/40} e^{-in\omega o t}\, dt$$

$$= (-4/(i n \omega_o))\, e^{-in\omega o t} \Big|_{-1/40}^{1/40}$$

$$= (8/(n \omega_o)) \left[(e^{in\omega o/40} - e^{-in\omega o/40}) / 2i) \right]$$

$$= (8 / (n \omega_o)) \operatorname{sen}(n \omega o / 40)$$

$$= (1/5) \left[\operatorname{sen}(n\omega_o/40)/(n\,\omega o/40)\right] = (1/5) \operatorname{sinc}(n\omega_o/40)$$

$$= (1/5) \operatorname{sinc}(n \pi / 5)$$

donde se define sinc (x) = (sen (x)) / x. Esta función desempeña un papel muy importante en la representación de señales.

El primer cruce en cero de la envolvente del espectro de C_n ocurre cuando $n\omega_o = 40\pi$ rad/s, y contiene 4 armónicas ($\omega_o = 8\pi$, $2\,\omega_o = 16\pi$, $3\omega_o = 24\pi$, $4\omega_o = 32\pi$).

La potencia total de I = f (t) es

$$P = (R / T) \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\, dt$$

$$= 4R \int_{-1/40}^{1/40} (1)^2\, dt = (.2)\, R \text{ watts} \qquad (29)$$

Por otro lado, la potencia contenida tomando la representación del espectro de frecuencia es

$$P = [\,|C_o|^2 + 2\,(|C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2)\,]\,R$$

$$= [(1/5)^2 + (2/5^2)\,(\mathrm{sinc}^2(\pi/5) + \mathrm{sinc}^2(2\pi/5) + \mathrm{sinc}^2(3\pi/5) + \mathrm{sinc}^2(4\pi/5))]\,R$$

$$= (0.181)\,R \text{ watts} \qquad (30)$$

Comparando (29) con (30) se observa que hasta el primer cruce en cero del espectro para $f(t)$ se tiene el 90.3% de la potencia total de $f(t)$. En algunas ocasiones en las que interviene la potencia de una señal, se toma como representación razonable de $f(t)$ a sus primeras 4 armónicas.

Ejemplo 7. Sea $f(t) = I = \mathrm{sen}^5(t)$. Hallar la potencia promedio disipada por ciclo aplicada a una resistencia de 1 Ohm.

Hemos visto en el ejemplo 3 de esta sección que

$$\mathrm{sen}^5(t) = (5/8)\,\mathrm{sen}(t) - (5/16)\,\mathrm{sen}(3t) + (1/16)\,\mathrm{sen}(5t).$$

Por (26)

$$P = R \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

$$= R\,[\,|C_o|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2\,]$$

$$= R\,[\,(a_o/2)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)/4)\,]$$

$$= R\,[\,(a_o^2/4) + (1/2)\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\,]$$

Aquí $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $b_1 = 5/8$, $b_3 = -5/16$, $b_5 = 1/16$, $b_n = 0$, $n = 2, 4, 6, 7, \ldots$; $R = 1$, luego

$$P = (1/2)\,[\,(5/8)^2 + (-5/16)^2 + (1/16)^2\,]$$

$$\cong 0.246 \text{ watts}$$

Ejemplo 8. (Circuitos Eléctricos).

Encontrar la corriente de estado estacionario (lo que significa que ésta, a medida que transcurre el tiempo, no decae sino que continúa indefinidamente su comportamiento periódico) producida en un circuito en serie RLC por el voltaje E (t) dado por

$$E(t) = \begin{cases} E_0 , & 0 \leq t \leq 0.005 \\ 0 , & 0.005 \leq t \leq 0.010 \end{cases} ; T = 0.010$$

con $R = 250\ \Omega$, $L = 0.02$ H, $C = 2 \times 10^{-6}$ F.

En electricidad se demuestra que dicha corriente, si es que se produce por un voltaje de la forma $A e^{i \omega t}$, puede hallarse dividiendo el voltaje entre la impedancia compleja ("American Standard Definitions of Electrical Terms": El vector de impedancia de una parte de un circuito eléctrico, cuando la corriente y la diferencia de potencial son sinusoides o cosinusoides simples, es la relación entre la diferencia de potencial armónica compleja y la corriente compleja correspondiente):

$$Z(\omega) = R + i(\omega L - 1/(\omega c))$$

como E (t) no tiene la forma pedida por este resultado, el primer paso es determinar el desarrollo de Fourier de E (t). Como planeamos usar la impedancia compleja, usaremos la forma compleja de Fourier en lugar de la forma trigonométrica real.

Tenemos

$$C_n = (1/0.01) \int_0^{0.005} E_0 e^{(-i n \pi t\, 2\pi)/0.01} \, dt$$

$$= 100\, E_0 (0.005/(-n \pi i))\, e^{-200 n \pi\ t\, i} \Big|_0^{0.005}$$

$$= E_0 ((1 - e^{n \pi i})/(2 n \pi i))$$

$$0 \ , \ n \text{ par} ; n \neq 0$$

$= \{$

$E_o / (n \pi i) = -(E_o / n \pi)\, i$, n impar

$$C_o = (1/0.01) \int_0^{0.005} E_o \, dt = E_o / 2 ,$$

por tanto,

$$E(t) = E_o (\ldots + (i\, e^{-600 \pi t i}/3\pi) + (i\, e^{-200 \pi t i}/\pi) + 1/2 - (i\, e^{200 \pi t i}/\pi) - (i\, e^{600 \pi t i}/3\pi) - \ldots)$$

$(\omega_o = 2\pi / T = 2\pi / 10^{-2} = 200\pi)$

$$z(\omega) = 250 + i\,(0.02\omega - 10^6 / 2\omega) ,$$

o, como $\omega = \omega_n = 200n\pi$

$$z(\omega) = z_n = 250 + i\,(4 n \pi - 2500 / n\pi)$$

Dividiendo cada término del desarrollo del voltaje E(t) entre el valor de $z(\omega)$ para la frecuencia correspondiente, es decir, el valor correspondiente z_n, encontramos

$$I(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar}}}^{\infty} D_n e^{200 n \pi t i} ,$$

donde

$$D_n = C_n / z_n = (-i E_o / n\pi)\,(1 / (250 + i\,(4 n \pi - 2500 / n \pi)))$$

$$= -i E_o / (250 n \pi + i\,(4 n^2 \pi^2 - 2500)$$

Si queremos obtener la forma trigonométrica real de este desarrollo, a saber,

$$I(t) = (a_o/2) + a_1 \cos(200 \pi t) + a_3 \cos(600 \pi t) + b_1 \operatorname{sen}(200 \pi t) + b_3 \operatorname{sen}(600 \pi t) + \ldots$$

tenemos que

$$a_n = D_n + D_{-n}$$

$$= - i E_0 [1 / (250 n\pi + i (4 n^2 \pi^2 - 2500)) + 1 / (-250 n \pi + i (4 n^2 \pi^2 - 2500))]$$

$$= - 2 E_0 (4 n^2 \pi^2 - 2500) / ((250 n \pi)^2 + (4 n^2 \pi^2 - 2500)^2)$$

Similarmente,

$$b_n = i (D_n - D_{-n})$$

$$= 500 n \pi E_0 / ((250 n \pi)^2 + (4 n^2 \pi^2 - 2500)^2), \text{ n impar.}$$

Ejemplo 9. (Conducción del calor)

Supongamos que tenemos una barra de sección transversal constante A (ver figura 12), donde la sección transversal es rectangular, aunque pudiera tener cualquier forma (por ejemplo, como la de un cilindro).

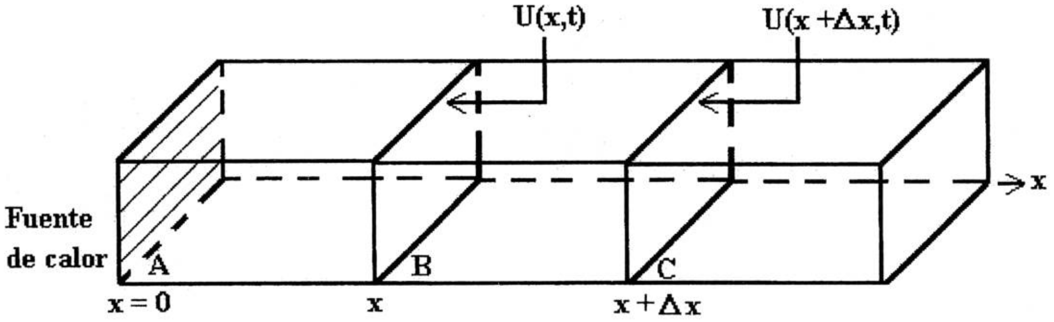


Figura 12

Consideremos el elemento de volumen de la barra incluido entre los dos planos vecinos paralelos denotados por B y C, a distancias x y x + Δ x respectivamente de A. Denotemos la temperatura en el plano B en el tiempo t por U (x , t), la temperatura en el plano C en el tiempo t estará dada entonces por U (x + Δx, t). Necesitamos las siguientes dos leyes físicas concernientes a la transferencia de calor.

1. Sea S el calor específico, esto es, la energía térmica necesaria para cambiar la temperatura de una unidad de masa de material en un grado centígrado. La cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de un objeto de masa m en una cantidad ΔU es

$$\Delta Q = m\, S\, \Delta U$$

2. La cantidad de calor que fluye a través de una área (tal como B o C) por unidad de tiempo es proporcional a la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia al área. Si tomamos como positiva la dirección de izquierda a derecha, escribimos

$$Q = -k\, A\, \Delta t\, (\partial U / \partial x) \qquad (31),$$

donde Q es la cantidad de calor que fluye a la derecha, Δt es la longitud de tiempo durante el cual ocurre el flujo, y k es la constante de proporcionalidad llamada <u>conductividad térmica</u> la cual depende del material. El signo - indica que Q es positivo (esto es, el flujo es a la derecha) cuando $\partial U/\partial x$ es negativo (es decir, la temperatura está aumentando a medida que vamos a la izquierda. Similarmente, Q es negativo cuando $\partial U/\partial x$ es positivo). Esto concuerda con los hechos físicos. Usando la segunda ley, podemos decir que la cantidad de calor fluye de izquierda a derecha en los planos B y C es

$$-k\, A\, \Delta t\, (\partial U/\partial x)\big|_{x} \quad \text{y} \quad -k\, A\, \Delta t\, (\partial U/\partial x)\big|_{x+\Delta x}$$

respectivamente. La cantidad neta de calor que se acumula en el volumen entre B y C es la cantidad que entra por B menos la cantidad que sale por C, esto es,

$$-k\, A\, \Delta t\, (\partial U/\partial x)\big|_{x} - \left(-k\, A\, \Delta t\, (\partial U/\partial x)\big|_{x+\Delta x}\right)$$

$$= k\, A\, \Delta t \left[\, (\partial U/\partial x)\big|_{x+\Delta x} - (\partial U/\partial x)\big|_{x} \,\right]$$

Esta cantidad de calor acumulado eleva o baja la temperatura del elemento de volumen, dependiendo de si es positiva o negativa. Por la primer ley

$$k\, A\, \Delta t \left[\, (\partial U/\partial x)\big|_{x+\Delta x} - (\partial U/\partial x)\big|_{x} \,\right] = m\, S\, \Delta U$$

puesto que $m = \rho(\text{volumen}) = \rho\ A\ \Delta x$. La ecuación (32) es sólo aproximadamente cierta, siendo la aproximación mejor entre más pequeños sean los valores de Δx, ΔU y Δt. Dividiendo (32) por $A\ (\Delta x)\ (\Delta t)$ y haciendo que Δx y Δt tiendan a cero, obtenemos:

$$k\ (\partial^2 U / \partial x^2) = \rho s\ (\partial U / \partial t)\ ,$$

ó

$$\partial U / \partial t = \delta\ (\partial^2 U / \partial x^2)\ ,$$

donde $\delta = k / \rho s$ se llama difusividad del material. Esta ecuación se llama ecuación del flujo de calor o de conducción de calor.

Ejemplo 10. Suponga que una barra delgada de metal de longitud L se coloca en el eje x de un sistema de coordenadas xy.

Supondremos que no hay escapes de calor de la superficie de la barra, esto es, la barra está aislada. Denotemos por $U(x, t)$ la temperatura de la barra en cualquier lugar de la barra y en cualquier tiempo. Suponga que la barra se sumerge en agua hirviendo de modo que su temperatura es de 100°C. Luego se saca y los extremos $x = 0$ y $x = L$ se mantienen en hielo para que la temperatura en los extremos sea 0°C.

Queremos resolver:

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_t = \delta\, U_{xx} & (33) \text{ si} \\ U(0, t) = 0 = U(L, t),\ t > 0\ ;\ U(x, 0) = 100 \ \text{ para } 0 < x < L & (34) \end{array} \right.$$

a) Separación de variables. Suponemos que (33) tiene una solución de la forma $U = X(x)\,T(t)$. Sustituyendo en (33) y separando variables obtenemos:

$$T' / \delta T = X'' / X \qquad (35)$$

Puesto que un lado de (35) depende de x, mientras que el otro depende de t, se sigue que cada lado es constante. Llamando a esta constante c y considerando los casos $c = 0$, $c > 0$ y $c < 0$, se puede ver que sólo $c < 0$ produce algo congruente con (34). Por tanto, suponemos que $c = -\lambda^2$ y obtenemos de (35),

$$T' + \delta \lambda^2 T = 0 \,, \quad X'' + \lambda^2 X = 0 \,,$$

ó

$$T = c_1 \operatorname{Exp}[-\delta \lambda^2 t] \,, \quad X = c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \operatorname{sen}(\lambda x).$$

Obtenemos

$$U(x, t) = \operatorname{Exp}[-\delta \lambda^2 t] (A \cos(\lambda x) + B \operatorname{sen}(\lambda x)), \quad A = c_1 c_2, \quad B = c_1 c_3.$$

Como $U(0, t) = 0 = A \operatorname{Exp}[-\delta \lambda^2 t]$, concluimos que $A = 0$, la solución queda $U(x, t) = B \operatorname{Exp}[-\delta \lambda^2 t] \operatorname{sen}(\lambda x)$. Ya que $U(L, t) = 0 = B \operatorname{Exp}[-\delta \lambda^2 t] \operatorname{sen}(\lambda L)$ y suponiendo $B \neq 0$ hallamos $\lambda = m\pi / L$.

b) Superposición. Suponemos ahora que (para m = 1, 2, 3, ...):

$$U(x, t) = b_1 \operatorname{Exp}[-\delta \pi^2 t / L^2] \operatorname{sen}(\pi x / L) + b_2 \operatorname{Exp}[-4 \delta \pi^2 t / L^2] \operatorname{sen}(2 \pi x / L) + \ldots$$

Así

$$U(x, 0) = 100 = b_1 \operatorname{sen}(\pi x / L) + b_2 \operatorname{sen}(2 \pi x / L) + \ldots + b_n \operatorname{sen}(n \pi x / L) + \ldots$$

Para completar la solución debemos hallar b_n. Observemos que se trata de la serie seno de Fourier de la función constante $U(x, 0) = 100$.

Tenemos que

$$b_n = (2 / L) = \int_0^L 100 \operatorname{sen}(n \pi x / L)\, dx = 200 (1 - \cos(n \pi)) / n \pi,$$

ó

$$b_1 = 400 / \pi, \; b_2 = 0, \; b_3 = 400 / 3\pi, \; b_4 = 0, \; b_5 = 400 / 5\pi, \ldots$$

Hallamos finalmente que

$$U(x, t) = (400/\pi) (\operatorname{Exp}[-\delta \pi^2 t / L^2] \operatorname{sen}(\pi x / L) + \operatorname{Exp}[-9 \delta \pi^2 t / L^2] \operatorname{sen}(3\pi x / L) + \ldots)$$

ó

$$U(x, t) = (400 / \pi) \sum_{m=1}^{\infty} (1/ (2m-1)) \operatorname{Exp}[-(2m-1)^2 \delta \pi^2 t / L^2] \operatorname{sen}[(2m-1) \pi x / L]$$

2.2 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier $F(\omega)$ es otro método de representación de una función $f(t)$. Estas dos descripciones son útiles en ingeniería porque, con frecuencia, alguna de ellas es más fácil de emplear en una aplicación particular o es más intuitiva en determinado problema. Por supuesto, la elección depende de cada caso.

El desarrollo de una función $f(t)$ en serie de Fourier se puede emplear para dos tipos de funciones. Se puede representar una función aperiódica en un intervalo finito, digamos $[0, M]$. El desarrollo en serie de Fourier se puede emplear también para representar una función periódica $f(t)$ en algún intervalo de interés.

Una de las interpretaciones que puede darse al desarrollo de una función $f(t)$ en serie de Fourier es que la función $f(t)$ se descompone en términos de sus armónicas; es decir, sus diversas componentes de frecuencia. Si $f(t)$ es periódica con periodo T, entonces tiene componentes de frecuencia $\omega_n = n\omega_o = \omega$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, donde $\omega_o = 2\pi / T$. La representación de f(t) necesita dos espectros discretos o de línea en el dominio de la frecuencia. Los coeficientes C_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ en (21) de la sección anterior, son generalmente complejos. Así, se escribe $C_n = | C_n | \text{Exp}[i \varnothing_n]$ donde $| C_n |$ es el módulo o magnitud de C_n y $\varnothing_n$ es el argumento de C_n. La gráfica de $| C_n |$ versus la frecuencia ω se denomina <u>espectro de amplitud</u> de la función periódica $f(t)$. La gráfica del ángulo de fase $\varnothing_n$ de C_n versus ω se denomina <u>espectro de fase</u> de $f(t)$. Puesto que $n \in Z$ en $\omega = n\omega_o$, los espectros de amplitud y de fase no son curvas continuas sino que aparecen en la variable discreta $n\omega_o$. Si los C_n son reales, el <u>espectro discreto de frecuencia</u> es una gráfica de líneas igualmente espaciadas con alturas proporcionales a las amplitudes $| C_n |$.

Si se desea extender lo anterior para que incluya funciones aperiódicas en $(-\infty,+\infty)$, se debe emplear otro tipo de descomposición (diferente al de series de Fourier) para $f(t)$. La descomposición útil se obtiene representando $f(t)$ mediante una "suma continua" de términos complejos de la forma $\text{Exp}[i\,\omega\, t]$, con esto se tiene la representación en términos de la <u>Transformada de Fourier</u> de $f(t)$.

Ejemplo 1. Sea

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & -T/2 < t < -d/2 \\ 1, & -d/2 < t < d/2 \\ 0, & d/2 < t < T/2 \end{cases} \qquad (T > d)$$

con $f_T(t+T) = f_T(t)$. Investigar la periodicidad de $f(t) = \lim_{T \to +\infty} f_T(t)$.

$f(t)$ ya no es periódica, pues,

$$f(t) = \lim_{T \to +\infty} f_T(t) = \begin{cases} 1, & -d/2 < t < d/2 \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Como consecuencia del ejemplo anterior indicamos que una función periódica con periodo T, pierde la periodicidad cuando $T \to +\infty$. Encontremos la representación de Fourier en este caso.

Considérese la representación de $f(t)$ en el intervalo $(-T/2, T/2)$ en su forma compleja.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega o t}, \quad \omega o = 2\pi / T \qquad ((19), \text{ sección } 2.1)$$

donde

$$C_n = (1/T) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega o t} dt \qquad ((20), \text{ sección } 2.1)$$

Sustituyendo (20) en (19), hallamos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ((1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega o t} dt) e^{in\omega o t} \qquad (1)$$

Supóngase ahora que $T \to +\infty$. Heurísticamente, la densidad de las armónicas $\omega_n = n\omega_o$ se incrementa y el espaciamiento entre ellas $\omega_o = 2\pi / T \to d\omega$, la variable discreta $n\omega_o = \omega_n$ se convierte en una variable continua ω. Así, la suma en (1) se convierte en integral y se halla que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (d\omega / 2\pi) (\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt) e^{i\omega t}$$

$$= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right) e^{i\omega t}\, d\omega$$

DEFINICION. La <u>transformada</u> o <u>integral</u> de Fourier de f (t) es la función

$$F(\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad (2)$$

La <u>Transformada</u> <u>Inversa</u> de Fourier de F(ω) en (2) se define como

$$f(t) = F^{-1}[F(\omega)] = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \qquad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) se conocen a menudo como <u>par</u> <u>de</u> <u>transformadas</u> <u>de</u> <u>Fourier</u>. Es común escribir:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

La función F (ω) desempeña un papel semejante al de C_n en las series de Fourier. Si F (ω) es real, la gráfica de F (ω) versus ω se llama <u>espectro</u> <u>continuo</u> <u>de</u> <u>frecuencia</u> de f (t). Sin embargo F (ω) es, en general, una función compleja de la variable real ω y por tanto se puede escribir en la forma F (ω) = | F(ω) | Exp [i ∅ (ω)] en donde | F(ω) | es el <u>espectro</u> <u>continuo</u> <u>de</u> <u>amplitud</u> de f (t) y θ (ω) es el <u>espectro</u> <u>continuo</u> <u>de</u> <u>fase</u> de f (t). F (ω) se puede interpretar como la distribución de la señal en el espacio de frecuencia ω.

No todas las funciones f (t) se pueden desarrollar en su transformada de Fourier. Las condiciones de Dirichlet constituyen un conjunto de condiciones suficientes para poder representar una función f(t) en términos de la integral de Fourier:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$

2) f (t) tiene a lo más un número finito de extremos relativos y de discontinuidades de salto en cualquier intervalo finito.

Estas condiciones incluyen a todas las señales de energía, es decir, señales f(t) para las cuales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt < +\infty$$

Sin embargo, existen varias señales importantes como la función escalón unitario que no cumplen la condición (1). Las transformadas de Fourier de estas funciones se pueden obtener empleando la teoría de distribuciones y usando funciones delta de Dirac. Las señales f(t) pueden clasificarse como:

1) Señales de energía: $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt < +\infty$

2) Señales de potencia: $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = +\infty$

pero $\lim_{T\to+\infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt$ existe.

Ejemplo 2. Pulso rectangular

Esta función está definida por

$$g_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T/2 \\ 0, & \text{los demás valores de } t. \end{cases}$$

Se tiene que

$$G_T(\omega) = F\{g_T(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g_T(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{Exp}\,[-i\omega\, t]\, dt$$

$$= -(1/i\,\omega)\, \mathrm{Exp}\,[-i\,\omega\, t \,\Big|_{-T/2}^{T/2}\,]$$

$$= -(1/i\,\omega)\, \mathrm{Exp}\,[e^{-i\omega T/2} - e^{i\omega T/2}]$$

$$= T \bullet (\mathrm{sen}\,(\omega T/2) / (\omega T/2)) = T\, \mathrm{sinc}\,(\omega T/2)$$

Así que el espectro de amplitud es

$$|\, G_T(\omega)\,| = T\,|\,\mathrm{sinc}\,(\omega T/2)\,|\,,$$

y el espectro de fase es

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0, & \mathrm{sinc}\,(\omega T/2) > 0 \\ \pi, & \mathrm{sinc}\,(\omega T/2) < 0. \end{cases}$$

Ejemplo 3. Pulso exponencial unilateral.

Esta función es $f(t) = A\, e^{-\alpha t}\, u(t)$, donde $u(t)$ es la función escalón unitario definida por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Tenemos que

$$F(\omega) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} A\, e^{-\alpha t}\, u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= A \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i \omega t} dt$$

$$= - A / (\alpha + i \omega) \lim_{R \to +\infty} e^{-(\alpha + i \omega) t} \Big|_0^R$$

$$= A / (\alpha + i \omega) , \quad \alpha > 0.$$

Los espectros de amplitud y fase aparecen en la figura 13. Las expresiones analíticas para $| F (\omega) |$ y $\theta (\omega)$ se obtienen encontrando la magnitud y el argumento, respectivamente, de la función compleja $F(\omega)$.

Estas expresiones son

$$| F (\omega) | = A / (\alpha^2 + \omega^2)^{1/2} , \quad \alpha > 0.$$

$$\theta (\omega) = \text{Arc tan } (-\omega / \alpha) = - \text{Arc tan } (\omega / \alpha)$$

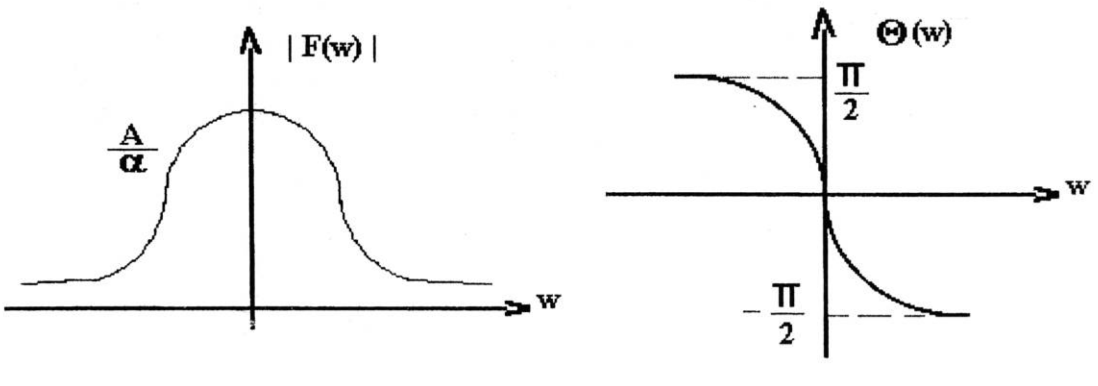


Figura 13

Las transformadas de otras funciones de energía se pueden calcular de la misma manera. Para señales de potencia será necesario considerar lo visto de la delta de Dirac en la sección 1.4. En la tabla 1 se resumen algunos de los pares de transformada más usuales. En la tabla 2, resumimos sin demostración las propiedades más importantes de la transformada de Fourier.

TABLA 1. Pares de Transformadas de Fourier.

Función del tiempo: $f(t)$	Transformada de Fourier: $F(\omega)$
1. $g_T(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t \rvert < T/2 \\ 0, & \text{los demás valores de } t. \end{cases}$	$T \operatorname{sinc}(\omega T/2)$
2. $e^{-at} u(t)$	$1/(a + i\omega)$
3. $t e^{-at} u(t)$	$1/(a + i\omega)^2$
4. $\begin{cases} A(1 - \lvert t \rvert / T), & \lvert t \rvert < T \\ 0, & \lvert t \rvert > T \end{cases}$	$AT \operatorname{sinc}^2(\omega T/2)$
5. $e^{-a\lvert t \rvert}$	$2a/(a^2 + \omega^2)$
6. $e^{-at} \operatorname{sen}(\omega_o t)\, u(t)$	$\omega_o / [(a + i\omega)^2 + \omega_o^2]$
7. $e^{-at} \cos(\omega_o t)\, u(t)$	$(a + i\omega) / [(a + i\omega)^2 + \omega_o^2]$
8. $\operatorname{Exp}[-a t^2]$	$(\pi/a) \operatorname{Exp}[-\omega^2/4a]$
9. $(t^{n-1}/(n-1)!)\, e^{-at} u(t)$	$1/(a + i\omega)^n$
10. $1/(a^2 + t^2)$	$(\pi/a) \operatorname{Exp}[-a \lvert \omega \rvert]$
11. $(\cos(bt))/(a^2 + t^2)$	$(\pi/2a)\, [e^{-a\lvert \omega - b \rvert} + e^{-a\lvert \omega + b \rvert}]$
12. $(\operatorname{sen}(bt))/(a^2 + t^2)$	$(\pi/(2a\,i))\, [e^{-a\lvert \omega - b \rvert} + e^{-a\lvert \omega + b \rvert}]$
13. $\cos(\omega_o t)\, [u(t + T/2) - u(t - T/2)]$	$(T/2)\, [\operatorname{sinc}((\omega - \omega_o)T/2) + \operatorname{sinc}((\omega + \omega_o)T/2)]$

TABLA 2. Principales Propiedades de la Transformada de Fourier.

1. Transformación:	$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$
2. Linealidad:	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
3. Simetría:	$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$
4. Escala:	$f(at) \leftrightarrow (1/\lvert a \rvert) F(\omega/a)$
5. Retardo:	$f(t - t_o) \leftrightarrow e^{-i\omega to} F(\omega)$
6. Modulación:	$e^{i\omega to} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_o)$
7. Convolución en el Tiempo:	$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$
8. Multiplicación o Convolución en la Frecuencia	$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow (1/2\pi) F_1(\omega) * F_2(\omega)$
9. Diferenciación en el Tiempo:	$(d^n/dt^n) f(t) \leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega)$
10. Integración en el Tiempo	$\int_{-\infty}^{t} f(u)\,du \leftrightarrow (F(\omega)/i\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
11. Diferenciación en frecuencia	$-it f(t) \leftrightarrow dF(\omega)/d\omega$
12. Integración en Frecuencia	$f(t)/(-it) \leftrightarrow \int F(\omega)\,d\omega$
13. Inversa:	$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$

Haremos uso de las propiedades para hallar la transformada de Fourier.

Ejemplo 4. Hallar la transformada de Fourier de la función $f(t) = A \operatorname{sinc}^2 (t A / 2)$

Usando (4) de la tabla 1, vemos que si

$$g(t) = \begin{cases} 1 - (|t| / A), & |t| < A \\ 0, & |t| > A, \end{cases} \qquad \text{(En (4), T = A, A = 1)}$$

entonces

$$G(\omega) = A \operatorname{sinc}^2 (\omega A / 2)$$

Notemos que $f(t) = G(t) = A \operatorname{sinc}^2 (t A / 2)$ y por la propiedad de simetría

$$f(t) = G(t) \leftrightarrow 2\pi\, g(-\omega) = \begin{cases} 2\pi (1 - |\omega| / A), & |\omega| < A \\ 0, & |\omega| > A \end{cases}$$

Ejemplo 5. Encontrar el espectro de frecuencia del doble pulso rectangular de la figura 14.

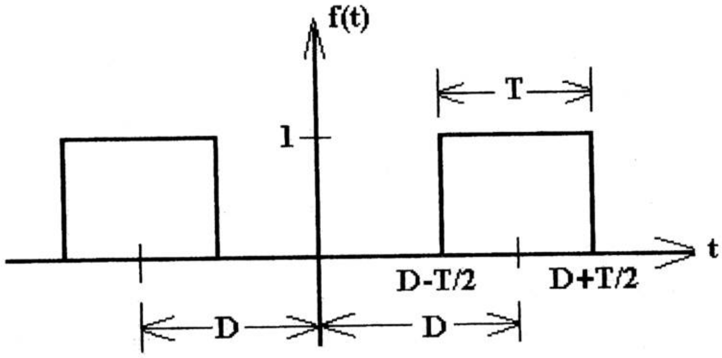


Figura 14

Hemos visto en el ejemplo 2 que $F[g_T(t)] = T \operatorname{sinc}(\omega T/2)$. Además

$$f(t) = g_T(t + D) + g_T(t - D),$$

de la propiedad de retardo obtenemos:

$$F[f(t)] = e^{i\omega D} T \operatorname{sinc}(\omega T / 2) + e^{-i\omega D} T \operatorname{sinc}(\omega T / 2).$$

Ejemplo 6. Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, hallemos la transformada de Fourier de $f(t)\cos(\omega_o t)$.

Ya que

$$\cos(\omega_o t) = (1/2)(e^{i\omega o t} + e^{-i\omega o t}),$$

por la propiedad de modulación,

$$F[f(t)\cos(\omega_o t)] = F[(1/2)e^{i\omega o t} f(t) + (1/2)e^{-i\omega o t} f(t)]$$

$$= (1/2)F(\omega - \omega_o) + (1/2)F(\omega + \omega_o)$$

En particular, si $f(t) = g_T(t)$, entonces

$$F[g_T(t)\cos(\omega_o t)] = (1/2) T \operatorname{sinc}((\omega - \omega_o) T / 2) + (1/2) T \operatorname{sinc}((\omega + \omega_o) T / 2)$$

Ejemplo 7. Utilizando convolución encontrar

$$f(t) = F^{-1}[1/(1 + i\omega)^2]$$

Nótese que de antemano sabemos (ver Tabla 1) que

$$f(t) = t e^{-t} u(t),$$

pero la idea aquí es utilizar la propiedad de convolución en el tiempo. Tenemos que

$$f(t) = F^{-1}[(1/(1+i\omega)) \bullet (1/(1+i\omega))]$$

$$= f_1(t) * f_2(t),$$

pero

$$f_1(t) = f_2(t) = F^{-1}[1/(1+i\omega)] = e^{-t} u(t),$$

luego

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} u(x) e^{-(t-x)} u(t-x)\, dx$$

Se tiene que

$$u(x)\,u(t-x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ó } t < x \\ 1, & 0 \le x \le t, \end{cases}$$

además $u(x)\,u(t-x) = 0$ para $t < 0$, luego

$$f(t) = \left[\int_{0}^{t} e^{-x} \bullet e^{-t+x}\, dx\right] u(t)$$

$$= \left[e^{-t} \int_{0}^{t} dx\right] u(t) = t e^{-t} u(t).$$

Ahora presentamos algunos cálculos con señales de potencias.

Ejemplo 8

a) Transformada de la función impulso.

$$F(\omega) = F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t}\, dt = 1.$$

De aquí $\delta(t) \leftrightarrow 1$. Por la propiedad de retardo hallamos

$$\delta(t - t_o) \leftrightarrow e^{-i\omega t_o}$$

Empleando la propiedad de simetría

$$e^{i\omega t_o} \leftrightarrow 2\pi\, \delta(\omega - \omega_o),$$

si $\omega_o = 0$:

$$1 \leftrightarrow 2\pi\, \delta(\omega).$$

b) Funciones sinusoidales.

$$\cos(\omega_o t) = (1/2)(e^{i\omega o t} + e^{-i\omega o t})$$

Empleando $e^{i\omega o t} \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega - \omega_o)$, vemos que

$$\cos(\omega_o t) \leftrightarrow \pi\,[\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)]$$

De manera semejante:

$$\text{sen}(\omega_o t) = (e^{i\omega o t} - e^{-i\omega o t})/2 \leftrightarrow i\,\pi\,[\delta(\omega + \omega_o) - \delta(\omega - \omega_o)]$$

Presentamos en la Tabla 3 una recopilación con la transformada de Fourier de las señales de potencia más usuales. Será útil repasar la sección 1.4

TABLA 3. Pares de Transformadas de Fourier.

1. $k\,\delta(t)$	k
2. k	$2\pi k\,\delta(\omega)$
3. $u(t)$	$\pi\,\delta(\omega) + 1/(i\omega)$
4. $\text{sgn}(t)$	$2/(i\omega)$
5. $\cos(\omega_o t)$	$\pi\,[\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)]$
6. $\text{sen}(\omega_o t)$	$i\,\pi\,[\delta(\omega + \omega_o) - \delta(\omega - \omega_o)]$
7. $e^{i\omega o t}$	$2\pi\,\delta(\omega - \omega_o)$
8. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\omega_o \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_o)$
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega o t}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\,\delta(\omega - n\omega_o)$

2.3 Aplicaciones de la Transformada de Fourier

1. Filtros.

Los filtros son dispositivos que permiten la transmisión libre de distorsión de una cierta banda de frecuencias y bloquean las restantes.

La energía total entregada por f (t) a una resistencia de 1 ohm es

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt$$

Tenemos por (3), sección 2.2 que

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \left[(1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega)\,d\omega\right] dt$$

$$= (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) f(t)\,dt\right] d\omega$$

(metiendo f (t) en la integral interior y cambiando el orden de integración)

$$= (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,F(-\omega)\,d\omega$$

$$= (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} |\,F(\omega)\,|^2\,d\omega$$

pues $F(-\omega) = F(\omega)^*$ (conjugado de $F(w)$)

Sea v (t) la función excitatriz de tensión aplicada a la entrada de un filtro pasabanda ideal (es decir, una red de dos puertas que permite el paso a todas las componentes de frecuencia de la señal de entrada, para las cuales $\omega_1 < | \omega | < \omega_2$; (todas las componentes que tienen frecuencias más allá de este, así llamado pasabanda, se atenúan completamente), y $V_o(t)$ la tensión de salida.

Si $v(t) = 4e^{-3t} u(t)$ (pulso exponencial) y definimos el filtro pasabanda por $2\pi < | \omega | < 4\pi$, entonces la energía en la salida es igual a la energía de la parte de v (t) que tiene componentes de frecuencia en los intervalos $2\pi < \omega < 4\pi$ y $-4\pi < \omega < -2\pi$. Concretamente,

$$F(\omega) = F[v(t)] = 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{-3t} u(t)\, dt$$

$$= 4 \int_{0}^{\infty} e^{-(3 + i\omega t)\, t}\, dt$$

$$= 4 / (3 + i\omega) \quad \text{(véase Tabla 1)}$$

Podemos ahora calcular la energía total en una resistencia de 1 ohm en la señal de entrada v (t):

$$W_v = (1 / 2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} | F(\omega) |^2\, d\omega$$

$$= (8 / \pi) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega / (9 + \omega^2)$$

$$= (16 / \pi) \int_{0}^{\infty} d\omega / (9 + \omega^2) = (8 / 3)\, J$$

Nótese que directamente:

$$W_v = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\, dt = 16 \int_{0}^{\infty} e^{-6t}\, dt = (8 / 3)\, J\,)$$

Sin embargo, la energía total en $v_o(t)$ (la salida) es menor:

$$W_{vo} = (1/2\pi)\int_{-4\pi}^{-2\pi} 16\, d\omega / (9+\omega^2) + (1/2\pi)\int_{2\pi}^{4\pi} 16\, d\omega / (9+\omega^2)$$

$$= (16/\pi)\int_{2\pi}^{4\pi} d\omega / (9+\omega^2)$$

$$= (16/3\pi)\,[\text{Arctan}(4\pi/3) - \text{Arctan}(2\pi/3)] \approx 0.358\ \text{J}$$

Observamos que un filtro pasabanda ideal permite remover energía de intervalos de frecuencia prescritos mientras aún retiene la energía contenida en otros intervalos de frecuencia. La transformada de Fourier ayuda a describir cuantitativamente la acción del filtro sin conocer la salida $v_o(t)$ a la entrada $v(t)$.

2. Transmisión sin distorsión.

¿Qué requisitos generales deben cumplirse para que un sistema lineal invariable con el tiempo se comporte como un sistema ideal de transmisión?

Para responder a esto, supóngase que debe transmitirse una señal $f(t)$ a través del sistema y se desea que la salida resultante sea igual a la entrada. La réplica puede tener una magnitud diferente y cierto retraso, siempre que la forma de la señal no se altere. O sea, que si $f(t)$ es la señal de entrada, la salida requerida es

$$g(t) = k\, f(t - t_o) \qquad (1)$$

Transformando ambos miembros de (1) y haciendo uso de la propiedad de desplazamiento en el tiempo

$$G(\omega) = k\, e^{-i\omega t_o} F(\omega) \qquad (2)$$

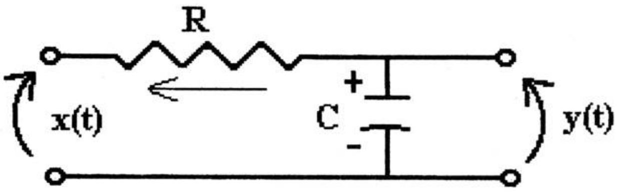
La <u>función de transferencia</u> (de la que hablaremos más ampliamente después) es la razón de la transformada de Fourier (o Laplace) de la salida a la transformada de Fourier (o Laplace) de la entrada. Para esta situación la función de transferencia del sistema para transmisión sin distorsión es

$$H(\omega) = k\, e^{-i\,\omega\, t_o} \qquad (3)$$

En conclusión, para obtener la transmisión sin distorsión, la respuesta global del sistema debe tener magnitud constante y su "desfasaje" debe ser lineal con la frecuencia. No basta que el sistema atenúe (o amplifique) todas las componentes de frecuencia por igual, estas componentes deben llegar con idéntico retraso para sumarse correctamente. Esto requiere de un desfasaje que sea proporcional a la frecuencia (para una frecuencia fija, el desfasaje es proporcional al retraso en el tiempo).

3. Circuitos Eléctricos

Obténgase el voltaje de salida del sistema mostrado en la Figura 15 (inicialmente no hay voltaje inicial del capacitor)



$$; \quad \frac{1}{RC} = a$$

Figura 15

si el voltaje de entrada es $x(t) = t\, e^{-at}\, u(t)$.

Primero encontraremos la respuesta del sistema al impulso unitario $h(t)$; para ello, hallaremos a su vez la respuesta del sistema $k(t)$ a la función escalón unitario, esto es, consideramos primero que $x(t) = u(t)$ (ver sección 1.4)

Por las leyes de Kirchhoff

$$x(t) = R\,i(t) + (1/c)\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt \qquad (4)$$

También

$$y(t) = (1/c)\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt, \quad dy/dt = (1/c)\,i(t) \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4)

$$x(t) = (RC)\,dy/dt + y(t)$$

Debemos resolver

$$(RC)\,dk/dt + k(t) = u(t), \quad k(0) = 0$$

Adelantándonos al capítulo 3 sobre Transformada de Laplace encontramos

$$RC\,[s\,K(s) - k(0)] + K(s) = 1/s$$

(Recordatorio: $L\{k'(t) = s\,K(s) - k(0)$, $L\{u(t)\} = 1/s$)

$$RC\,s\,K(s) + K(s) = 1/s$$

ó

$$K(s) = 1/((RCS)(s + 1/RC)) = (1/RC)/(s(s + 1/RC))$$

Ya que $L^{-1}\{a/(s(s+a))\} = (1 - e^{-at})\,u(t)$, encontramos que

$$k(t) = L^{-1}\{(1/RC)/(s(s + 1/RC))\} = (1 - e^{-t/RC})\,u(t)$$

La respuesta al impulso unitario es

$$h(t) = k'(t) = d/dt\,(1 - e^{-t/RC})\,u(t)$$

$$= (1 - e^{-t/RC})\,\delta(t) + (1/RC)\,e^{-t/RC}\,u(t)$$

$$= (1/ RC)\, e^{-t/RC}\, u(t).$$

De la sección 1.4, la salida al sistema está dada por

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Aplicando la propiedad de convolución de la transformada de Fourier:

$$Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega),$$

donde $H(\omega) = F[h(t)]$ es la <u>función</u> <u>de</u> <u>transferencia</u> <u>del</u> <u>sistema</u> o <u>función</u> <u>del</u> <u>sistema</u>. De la tabla 1 se ve que

$$H(\omega) = F[(1/ RC)\, e^{-t/RC}\, u(t)]$$

$$= (1/RC)\, [1/ (1/ RC + i\,\omega)] = 1/ (1 + i\,\omega\, RC)$$

$$X(\omega) = F[t\, e^{-at}\, u(t)] = 1 / (a + i\,\omega)^2$$

$$= (RC)^2 / (1 + i\,\omega\, RC)^2 \qquad \text{(pues } a = 1 / RC)$$

Así,

$$Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega)$$

$$= (1/ (1 + i\,\omega\, RC))\, (RC / (1 + i\,\omega\, RC))^2 = (RC)^2/ (1 + i\,\omega RC)^3$$

Por lo tanto,

$$y(t) = F^{-1}\{(RC)^2/ (1 + i\,\omega\, RC)^3\}$$

$$= F^{-1}\{(1/ RC)\, (1 / (1/ RC + i\,\omega)^3\}$$

$$= (1/ 2\, RC)\, (t^2\, e^{-t/RC})\, u(t) \qquad \text{(ver Tabla 1).}$$

4. Más sobre circuitos eléctricos

a) Obtengamos la expresión operacional para la respuesta de la corriente i (t), al voltaje v (t), del circuito en serie RLC.

La entrada al sistema es el voltaje aplicado v (t), y la respuesta (o salida) es la corriente i (t). Por la ley de Kirchhoff:

$$R\,i(t) + L\,d\,i(t)/dt + (1/c)\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = v(t) \qquad (6)$$

Diferenciando ambos miembros, obtenemos

$$L\,d^2 i/dt^2 + R\,d i/dt + (1/c)\,i(t) = d\,v(t)/dt \qquad (7)$$

Utilizando el operador p = d /dt introducido en (18) de la sección 1.4, (7) se puede expresar como

$$(L\,p^2 + R\,p + 1/c)\,i(t) = p\,v(t) \qquad (8)$$

Por tanto,

$$i(t) = (p/(L\,p^2 + R\,p + 1/c))\,v(t) = H(p)\,v(t) \qquad (9)$$

donde

$$H(p) = p/(L\,p^2 + R\,p + 1/c) = 1/(R + L\,p + 1/c\,p) = 1/z(p) = Y(p)$$

En el circuito en cuestión, Y (p) se denomina <u>función de admitancia operacional</u>, y z (p) = 1/Y(p) se denomina <u>función de impedancia operacional</u>.

b) La respuesta de un sistema lineal e invariable en el tiempo a una función exponencial $e^{j\omega t}$, también es una función exponencial y proporcional a la entrada.

Matemáticamente (ver sección 1.1) un sistema lineal invariante en el tiempo queda descrito si la entrada x (t) y la salida y (t) se relacionan por

$$\sum_{n=0}^{n} a_n p^n y(t) = \sum_{m=0}^{m} b_m p^m x(t) \qquad (10)$$

ó

$$A(p)\,y(t) = B(p)\,x(t) \qquad (11),$$

con a_n, b_m constantes y p el operador d /dt.

Ahora supongamos que $x(t) = e^{j\omega t}$, entonces

$$A(p)\,y(t) = B(p)\,e^{j\omega t} \qquad (12)$$

Ya que

$$p^m e^{j\omega t} = d^m/dt^m\,(e^{j\omega t}) = (j\omega)^m e^{j\omega t},$$

$$B(p)\,e^{j\omega t} = B(j\omega)\,e^{j\omega t},$$

por tanto,

$$A(p)\,y(t) = B(j\omega)\,e^{j\omega t} \qquad (13)$$

La función excitatriz de (13) es $B(j\omega)\,e^{j\omega t}$, una función exponencial. Del método de coeficientes indeterminados de ecuaciones diferenciales, inferimos que la respuesta $y(t)$ también es exponencial. De donde si $y(t) = k_1 e^{j\omega t}$, entonces

$$A(p)\,y(t) = A(p)\,[k_1 e^{j\omega t}] = k_1 A(p)\,[e^{j\omega t}]$$

$$= k_1 A(j\omega)\,e^{j\omega t} = A(j\omega)\,y(t) \qquad (14)$$

Sustituyendo (14) en (13), se obtiene:

$$A(j\omega)\,y(t) = B(j\omega)\,e^{j\omega t} \qquad (15)$$

Por tanto, si $A(j\omega) \neq 0$, entonces

$$y(t) = (B(j\omega)/A(j\omega))\,e^{j\omega t} = H(j\omega)\,e^{j\omega t}$$

c) La transformada de Fourier de la respuesta al impulso unitario de un sistema lineal, se denomina <u>función del sistema</u>

$$H(\omega) = F[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \qquad (16)$$

Si X (ω) y Y (ω) denotan las transformadas de Fourier, de la entrada x (t) y de la salida y (t) de un sistema lineal, respectivamente, entonces

$$Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega) \qquad (17)$$

Además

$$H(\omega) = H(j\omega) \qquad (18),$$

donde H (ω) se define por (16) y H (j ω) por el hecho de que $y(t) = H(j\omega)\, e^{j\omega t}$ si $x(t) = e^{j\omega t}$ (ver 15)

Para ver (17), recordamos que por convolución $y(t) = x(t) * h(t)$. Aplicando el teorema de convolución en el tiempo:

$$Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega)$$

que es (17)

Para ver (18), si $x(t) = e^{j\omega_o t}$, entonces

$$X(\omega) = F[x(t)] = F[e^{j\omega_o t}] = 2\pi\, \delta(\omega - \omega_o) \quad \text{(ver Tabla 3).}$$

De aquí

$$X(\omega)\, H(\omega) = 2\pi\, \delta(\omega - \omega_o)\, H(\omega) = 2\pi\, H(\omega o)\, \delta(\omega - \omega_o) \qquad (19),$$

entonces, por (17), se tiene

$$y(t) = F^{-1}[Y(\omega)] = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\, H(\omega_o)\, \delta(\omega - \omega_o)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= H(\omega_o) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_o)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= H(\omega_o)\, e^{j\omega_o t} \qquad (20).$$

Dado que (20) se cumple para cualquier valor de ω_o, se puede cambiar ω_o por ω y se obtiene

$$y(t) = H(\omega)\, e^{j\omega t} \qquad (21)$$

Comparando (21) y $y(t) = H(j\omega)\, e^{j\omega t}$, se concluye que

$$H(\omega) = H(j\omega),$$

la distinción es sólo cuestión de notación.

d) Hallar la respuesta al impulso unitario, del circuito en serie RC.

Deseamos hallar $H(\omega)$, pero por (18) bastará hallar $H(j\omega)$. Por Kirchhoff

$$x(t) = R\,i(t) + (1/c)\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = (R + 1/pc)\,i(t),$$

la respuesta es:

$$y(t) = (1/c)\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = (1/pc)\,i(t),$$

entonces

$$H(p) = y(t)/x(t) = (1/pc)/(R + 1/pc),$$

luego

$$H(j\omega) = (1/j\omega c)/(R + 1/j\omega c) = 1/(1 + j\omega RC) = 1/(RC(j\omega + 1/RC)),$$

por tanto (ver Tabla 1)

$$h(t) = F^{-1}[H(j\omega)] = (1/RC)\,F^{-1}[1/(j\omega + 1/RC)]$$

$$= (1/RC)\, e^{-t/RC}\, u(t).$$

(compárese con el trabajo hecho en la aplicación 3 de esta sección).

3. La Transformada de Laplace

3.1 Introducción

Muchas de las funciones requeridas en la ingeniería no tienen transformada de Fourier. Si nos encontramos con un circuito RLC excitado por una función como $v(t) = t\,u(t)$, ¿existirá algún procedimiento de resolución, distinto del clásico de un curso de ecuaciones diferenciales, que consiste en sumar las respuestas natural y estable? Afortunadamente, la respuesta es afirmativa. En efecto, existe una transformada idónea, que opera con "todas" las funciones de entrada en el dominio del tiempo, llamada transformada de Laplace.

Las propiedades de la transformada de Laplace y su utilización en el análisis de circuitos y sistemas nos permite obtener, por procedimientos algebraicos, soluciones analíticas para el conjunto de ecuaciones de estado y respuestas a entrada cero, estado cero, y completas de sistemas lineales; sin necesidad de integrar o ensayar soluciones. Las condiciones iniciales se tienen en cuenta de forma automática. En resumen, siempre que el sistema sea lineal, la herramienta analítica fundamental disponible es la transformada de Laplace.

3.2 De Fourier a Laplace

Calculemos la transformada de Fourier de $f(t)u(t)$ multiplicada por un término amortiguador $e^{-\sigma t}$.

$$g(t) = e^{-\sigma t} f(t)\,u(t) \qquad (1)$$

Presumiblemente podremos encontrar un valor de la constante σ, suficientemente grande, pero finito, tal que $g(t)$ sea absolutamente integrable para una amplia gama de funciones $f(t)$

$$\int_{t_0}^{t_0+t} |g(t)|\,dt < \infty \quad \text{para cualquier } t_0 \qquad (2)$$

La transformada de Fourier de (1) es:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} f(t)\, u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-(\sigma + j\omega)t}\, dt$$

Sustituyendo $s = \sigma + j\omega$ tenemos

$$G(\omega)\,|_{s=\sigma+j\omega} = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Si designamos a esta función por F(s):

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (3)$$

donde el límite inferior se expresa como $t = 0^-$, con el fin de permitir en f (t) una función impulso para t = 0. A F(s) se llama <u>transformada</u> <u>de</u> <u>Laplace</u> de f (t), L {f (t)} = F (s). La transformada inversa de Fourier de G (ω) es

$$e^{-\sigma t} f(t)\, u(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (4)$$

Si multiplicamos por $e^{\sigma t}$ la ecuación (4), tenemos

$$f(t)\, u(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, e^{(\sigma + j\omega)t}\, d\omega$$

$$= (1/2\pi j) \int_{j\omega = -j\infty}^{j\infty} G(\omega)\, e^{(\sigma + j\omega)t}\, d(j\omega),$$

sustituyendo de nuevo $s = \sigma + j\omega$ y, por tanto, $d\,s = d\,(j\,\omega)$,

$$f(t) = (1/2\pi j) \int_{s=\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\, e^{st}\, d(s) , \qquad (5)$$

donde f (t) se supone de valor cero para $t < 0$. La ecuación (5) constituye la transformada inversa de F(s), $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Utilizaremos la transformada de Laplace de señales de entrada (que suponemos de valor cero para t menor que cero) junto con la función de transferencia H (s), para obtener la salida de un sistema lineal. Comprobaremos que mientras que la transformada de Fourier nos da la respuesta a estado cero, la transformada de Laplace nos da la respuesta completa; teniendo en cuenta, automáticamente, las condiciones iniciales.
De aquí en adelante todas las funciones f (t) son cero para valores de t negativos. Así el nombre completo de (3) es el de <u>transformada</u> <u>de</u> <u>Laplace</u> <u>unilateral</u> . Existe la transformada de Laplace bilateral, pero no la consideraremos aquí.

Terminamos esta sección con dos asuntos

1. Teorema de existencia.

Sea f una función real que tiene las siguientes propiedades:

a. f es seccionalmente continua en todo intervalo cerrado finito $0 \le t \le M$ $(M > 0)$.

b. f es de orden exponencial; es decir, existen α, $m > 0$, y $to > 0$ tales que

$$e^{-\alpha t}\,|\,f(t)\,| < m \quad \text{para } t > to.$$

Entonces la transformada de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

de f existe para $s > \alpha$.

2. Teorema de unicidad.

Sean f y g dos funciones que son continuas para $t \geq 0$ y tales que $L\{f(t)\} = L\{g(t)\}$. Entonces $f(t) = g(t)$ para toda $t \geq 0$. Por lo tanto se sabe que si una función F tiene una transformada inversa continua f, entonces f es la <u>única</u> transformada inversa continua de F.

3.3 Ejemplos de transformadas de Laplace

1.

$$L\{e^{-at}u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$= -(1/(s+a)) \lim_{R\to+\infty} e^{-(s+a)t} \Big|_0^R$$

$$= 1/(s+a) \;;\; s > -a.$$

2. Consideremos la función f definida por $f(t) = \operatorname{sen}(bt)$, $t > 0$.

$$L\{\operatorname{sen}(bt)\} = \lim_{R\to+\infty} \int_{0^-}^{R} e^{-st} \operatorname{sen}(bt)\, dt$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left[-(e^{-st}/(s^2+b^2))(s \operatorname{sen}(bt) + b\cos(bt)) \right]_0^R$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left[b/(s^2+b^2) - (e^{-sR}/(s^2+b^2))(s \operatorname{sen}(bR) + b\cos(bR)) \right]$$

$$= b/(s^2+b^2) \;,\; s > 0.$$

3. Obtener $L\{t^n u(t)\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Tenemos que

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} t^n e^{-st} \, dt$$

Integrando por partes

$$\int u \, dv = u v - \int v \, du$$

Haciendo $u = t^n$ y $d v = e^{-st} d t$, resulta que

$$F(s) = \lim_{R \to +\infty} \left[- (t^n / s) e^{-st} \Big|_{0^-}^{R} \right] - \int_{0^-}^{\infty} (-1/s) e^{-st} n t^{n-1} d t$$

$$= 0 + (n / s) L \{t^{n-1}\} \; ; \; s > 0.$$

Aplicando esto sucesivamente:

$$F(s) = (n/s) \bullet (n-1)/s \bullet (n-2)/s \ldots (3/s) \bullet (2/s) \bullet (1/s) \bullet L \{t^o\}$$

y

$$L \{t^o\} = L \{u (t)\} = 1 / s ,$$

del ejemplo (1) con a = 0. De forma que

$$F(s) = (n ! / s^n) \bullet (1 / s) = n! / s^{n+1} , \; s > 0.$$

4. Obtener $L \{\delta (t)\}$

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta (t) e^{-st} d t = 1 ,$$

por las propiedades de la función δ.

La siguiente tabla incluye las transformadas de algunas de las funciones de tiempo más utilizadas en el análisis de circuitos y sistemas.

TABLA 1. Pares de Transformadas de Laplace

Función del tiempo: f (t)	Transformada de Laplace: F (s)
1. $\delta(t)$	1
2. $k\,u(t)$	k/s
3. $t^n u(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$	$n!/s^{n+1}$
4. $e^{at} u(t)$	$1/(s-a)$
5. $\operatorname{sen}(a t)\, u(t)$	$a/(s^2+a^2)$
6. $\cos(a t)\, u(t)$	$s/(s^2+a^2)$
7. $\operatorname{senh}(a t)\, u(t)$	$a/(s^2-a^2)$
8. $\cosh(a t)\, u(t)$	$s/(s^2-a^2)$
9. $u_a(t) = u(t-a)$	e^{-as}/s

3.4 Propiedades de la transformada de Laplace

1. La transformada de Laplace L es un operador lineal: Si c_1 y c_2 son constantes, entonces

$$L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\} \qquad (1)$$

Precisando, si $L\{f_1\}$ existe para $s > a_1$ y $L\{f_2\}$ existe para $s > a_2$, entonces $L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\}$ existe para $s > \text{máx}\{a_1, a_2\}$, y es válida la ecuación (1). La regla (1) se sigue inmediatamente de la definición de L.

2. Transformada de una derivada

Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \qquad (2)$$

si $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas para $0 \le t \le M$ y de orden exponencial para $t > N$, además, si $f^{(n)}(t)$ es seccionalmente continua en $0 \le t \le N$.

Para probar (2), procederemos por inducción.

a) Para s suficientemente grande

$$L\{f'(t)\} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f'(u)\, e^{-su}\, du$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[f(u)\, e^{-su} \Big|_0^t + s \int_0^t f(u)\, e^{-su}\, du \right]$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[f(t)\, e^{-st} - f(0) + s \int_0^t f(u)\, e^{-su}\, du \right]$$

Ya que $f(t)$ es de orden exponencial para $t > N$, si s es suficientemente grande

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-st} = 0,$$

luego

$$L\{f'(t)\} = s\,F(s) - f(0).$$

b) Hipótesis de inducción. Supongamos que (2) es válida, entonces

c) $L\{f^{(n+1)}(t)\} = L\{(f')^{(n)}(t)\}$

$$= s^n L\{f'(t)\} - s^{n-1} f'(0) - s^{n-2} f''(0) - \dots - f^{(n)}(0)$$

$$= s^n [s F(s) - f(0)] - s^{n-1} f'(0) - s^{n-2} f''(0) - \dots - f^{(n)}(0)$$

$$= s^{n+1} F(s) - s^n f(0) - s^{n-1} f'(0) - s^{n-2} f''(0) - \dots - s f^{(n-1)}(0)$$

$$- \; f^{(n)}(0).$$

3. Transformada de una integral

Sea $f(t)$ continua para $0 \le t < \infty$ y sea

$$g(t) = \int_0^t f(u)\, du$$

Entonces $g(0) = 0$ y, por cálculo, $g'(t) = f(t)$, de modo que por (2)

$$L\{f\} = L\{g'\} = s L\{g\},$$

luego

$$L\{\int_0^t f(u)\, du\} = F(s)/s \qquad (3),$$

donde $F(s) = L\{f\}$.

4. Primer propiedad de traslación

Si $L\{f\} = F$, entonces

$$L\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt,$$

luego

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s - a). \qquad (4)$$

5. Transformada de una función periódica

Si f (t) tiene periodo T > 0, entonces

$$L\{f(T)\} = 1/(1 - e^{-sT}) = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt. \qquad (5)$$

En efecto,

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)\,dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)\,dt + \ldots$$

En la segunda integral, sea t = u + T; en la tercera integral, sea t = u + 2T, etc. Entonces

$$L\{f(t)\} = \int_0^T e^{-su} f(u)du + \int_0^T e^{-s(u+T)} f(u+T)du + \int_0^T e^{-s(u+2T)} f(u+2T)du + \ldots$$

(por periodicidad, f (u + T) = f (u), f (u + 2T) = f (u), etc.)

$$= \int_0^T e^{-su} f(u)\,du + e^{-sT} \int_0^T e^{-su} f(u)\,du + e^{-2sT} \int_0^T e^{-su} f(u)\,du + \ldots$$

$$= (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \ldots) \int_0^T e^{-su} f(u)\,du$$

$$= (1/(1 - e^{-sT})) \int_0^T e^{-su} f(u)\,du$$

El resto de las propiedades sólo las enunciaremos sin bosquejar su demostración.

6. Segunda propiedad de traslación

Si $L\{f(t)\} = F(s)$ y $a > 0$, entonces

$$L\{u(t-a)\, f(t-a)\} = e^{-as} F(s) \tag{6}$$

En particular

$$L\{u(t-a)\} = e^{-as}/s, \quad s > 0. \tag{7}$$

7. Derivada de una transformada

Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n (d^n/ds^n)\, F(s) \tag{8}$$

8. Integral de una transformada

Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$L\{f(t)/t\} = \int_s^{\infty} F(u)\, du \tag{9}$$

siempre que exista $\lim\limits_{t\to 0} f(t)/t$.

9. Comportamiento de F(s) cuando $s \to \infty$.

Si $L\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \tag{10}$$

10. Teorema del valor inicial

Si los límites indicados existen, entonces

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

11. Teorema del valor final

Si existen los valores indicados, entonces

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to \infty} s F(s)$$

12. Convolución

Sean f y g definidas para $t \geq 0$, continuas por tramos. La convolución $f * g$ se define por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du, \quad 0 \leq t < \infty$$

Tenemos que

$$L\{(f * g)(t)\} = L\{f(t)\}\, L\{g(t)\}$$

Ejemplos

1. Obtener la transformada de Laplace de $f(t) = A e^{-at} \cos(\omega_0 t + \theta)$.

Utilizando

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b)$$

$$\cos(\omega_0 t + \theta) = \cos(\omega_0 t) \cos(\theta) - \operatorname{sen}(\omega_0 t) \operatorname{sen}(\theta),$$

luego

$$L\{\cos(\omega_0 t + \theta)\} = s \cos(\theta) / (s^2 + \omega_0^2) - \omega_0 \operatorname{sen}(\theta) / (s^2 + \omega_0^2).$$

Por tanto, por la propiedad (4),

$$L\{A e^{-at} \cos(\omega_0 t + \theta)\} = A [(s + a) \cos(\theta) - \omega o \operatorname{sen}(\theta)] / ((s + a)^2 + \omega_0^2)$$

2. Sea $f(t) = t$ para $0 \leq t \leq 1$, $f(t) = 2 - t$, $1 \leq t \leq 2$, y sea f con periodo igual a 2 para $t \geq 0$. Hallar $L\{f(t)\}$.

Por la propiedad (5) ,

$$L\{f(t)\} = (1 / (1 - e^{-2s})) \int_0^2 e^{-st} f(t)\, dt.$$

Tenemos que

$$\int_0^2 f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^1 t\, e^{-st}\, dt + \int_1^2 (2 - t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= (e^{-2s} - 2\, e^{-s} + 1) / s^2 ,$$

luego

$$L\{f(t)\} = (e^{-2s} - 2\, e^{-s} + 1) / (s^2 (1 - e^{-2s})) = (1 - e^{-s}) / (s^2 (1 + e^{-s}))$$

3. Hallar $L^{-1}\{1 / (s^2 + 1)^2\}$

Escribimos

$$1 / (s^2 + 1)^2 = (1 / (s^2 + 1)) \bullet (1 / (s^2 + 1))$$

$$= L\{\text{sen}(t)\}\, L\{\text{sen}(t)\}$$

$$= L\{\text{sen}(t) * \text{sen}(t)\}$$

Por lo tanto,

$$L^{-1}\{1 / (s^2 + 1)^2\} = \int_0^t \text{sen}(u)\ \text{sen}(t - u)\, du$$

$$= (1/2) \int_0^t [\cos(2u - t) - \cos(t)]\, du$$

$$= (1/2)(\text{sen}(t) - t\cos(t))$$

4. Este ejemplo pone de manifiesto la importancia de la transformada de Laplace para obtener respuestas completas. En el proceso, todas las condiciones iniciales se tienen en cuenta automáticamente.

Hallar la respuesta natural $x_n(t)$ de

$$d^2x / dt^2 + 3\, dx / dt + 6x = 0$$

si $x(0) = x'(0) = 3$

Aplicamos transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación diferencial. Se obtiene

$$s^2 X(s) - s\,x(0) - x'(0) + 3\,s\,X(s) - 3\,x(0) + 6\,X(s) = 0$$

Usando las condiciones iniciales y despejando X (s) hallamos

$$X(s) = 3 / (s^2 + 3\,s + 6) = 3 / ((s + 3/2)^2 + 15/4)$$

Usando la propiedad (4) encontramos que

$$x_n(t) = L^{-1}\{3 / ((s + 3/2)^2 + 15/4)\}$$

$$= 3 \bullet (2 / (15)^{1/2})\, e^{-3t/2}\, \text{sen}((15)^{1/2}\, t/2)\, u(t)$$

$$= (6 / (15)^{1/2})\, e^{-3t/2}\, \text{sen}((15)^{1/2}\, t/2)\, u(t).$$

5. Halle la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = 1 / (s\,(s^2 + 2\,s + 2))$$

Usando fracciones parciales

$$1 / (s\,(s^2 + 2\,s + 2)) = A / s + (Bs + C) / (s^2 + 2\,s + 2),$$

de aquí

$$1 = A\,(s^2 + 2\,s + 2) + (B\,s + C)\,s$$

Comparando los coeficientes de los términos en s^2, s, s^o, se obtiene

$$A + B = 0,\quad 2A + C = 0,\quad 2A = 1$$

de donde

$$A = 1/2,\quad B = -1/2,\quad C = -1$$

Por lo tanto,

$$F(s) = (1/2\,s) - (1/2)\,(1/((s + 1)^2 + 1)) - (1/2)\,((s + 1)/((s + 1)^2 + 1))$$

Por la propiedad (4) y la tabla 1

$$f(t) = 1/2 - (1/2)\,e^{-t}\,\text{sen}(t) - (1/2)\,e^{-t}\cos(t),\quad t \geq 0$$

6. Halle la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = (s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5) / (s(s+1))$$

Como el polinomio numerador es de grado superior al del polinomio denominador, dividiendo el numerador entre el denominador, se tiene

$$F(s) = s^2 + s + 2 + (2s + 5) / (s(s+1))$$

$$= s^2 + s + 2 + A / s + B / (s+1)$$

Encontramos que $A = 5$ y $B = -3$. Así que

$$F(s) = s^2 + s + 2 + 5 / s - 3 / (s+1)$$

La transformada de Laplace de la función impulso unitario $\delta(t)$ es 1 y las transformadas de Laplace de $d/dt(\delta(t))$ y $d^2/dt^2(\delta(t))$ son s y s^2, respectivamente. Luego

$$f(t) = d^2/dt^2(\delta(t)) + d/dt(\delta(t)) + 2\delta(t) + 5 - 3e^{-t}, \quad t \geq 0^-.$$

7. Considere el sistema mecánico que aparece en la figura 16. Supóngase que el sistema se pone en movimiento por una fuerza de impulso unitario. Encontrar la oscilación resultante. Supóngase que el sistema está inicialmente en reposo.

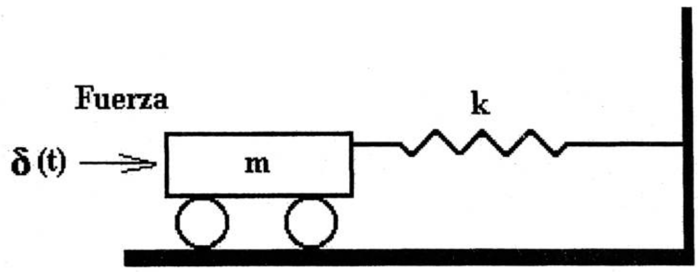


Figura 16

El sistema es excitado por un impulso unitario. Por tanto,

$$m x'' + k x = \delta(t) \quad \text{(ver (12), sección 1.4)}$$

Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de esta ecuación, se tiene

$$m\,[s^2 X(s) - s\,x(0) - x'(0)] + k\,X(s) = 1$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$ en la última ecuación y despejando a $X(s)$ se obtiene

$$X(s) = 1/(ms^2 + k)$$

Por lo tanto,

$$x(t) = L^{-1}\{1/(ms^2 + k)\} = (1/(mk)^{1/2})\ \mathrm{sen}\,((k/m)^{1/2}\ t)$$

La oscilación es un movimiento armónico simple con amplitud $1/(mk)^{1/2}$.

3.5 Funciones de Transferencia. Estabilidad

Supongamos que tenemos la ecuación diferencial de un sistema lineal

$$a_n\, d^n y/dt^n + a_{n-1}\, d^{n-1} y/dt^{n-1} + \ldots + a_1\, dy/dt + a_o\, y$$

$$= b_m\, d^m x/dt^m + b_{m-1}\, d^{m-1} x/dt^{m-1} + \ldots + b_1\, dx/dt + box \qquad (1)$$

donde $x(t)$ es la entrada e $y(t)$ la salida, con todas las condiciones iniciales cero. La transformada de Laplace de la ecuación (1) es

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_o)\, Y(s)$$

$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_o)\, X(s) \qquad (2)$$

Definimos la <u>función de transferencia</u> (ver aplicación 2, de la sección 2.3) como

$$H(s) = Y(s)/X(s)$$

$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_o)/(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_o) \qquad (3)$$

De aquí que

$$Y(s) = X(s)\, H(s) \qquad (4)$$

Es decir, la transformada de Laplace de la respuesta a estado cero (recuérdese que para obtener (2) hemos supuesto que todas las condiciones iniciales son iguales a cero) es el producto de la transformada de Laplace de la entrada por la función de transferencia H (s). Podemos indicar que (4) es equivalente en el dominio de s a

$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad (5)$$

Si se supone que las condiciones iniciales no son cero, la transformada de Laplace de la ecuación (1) es

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_o)\,Y(s) - (a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \ldots + a_1)\,y(0^-)$$
$$- (a_n s^{n-2} + a_{n-1} s^{n-3} + \ldots + a_2)\,y'(0^-) - \ldots - a_n y^{(n-1)}(0^-) = F(s) \qquad (6)$$

donde F(s) es la transformada de Laplace (tomada término a término) del segundo miembro de la ecuación (1). Despejando Y(s) en (6) obtenemos

$$Y(s) = (F(s) + \text{términos de las condiciones iniciales})/(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_o) \qquad (7)$$

$$= F(s)/(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_o)$$
$$+ (\text{términos de Cond. Inic.})/(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_o) \qquad (8)$$

El primer término del segundo miembro de la ecuación (8) es la transformada de Laplace de la respuesta a estado cero y el segundo término es la transformada de Laplace de la respuesta a entrada cero. Por lo tanto, la ecuación (8) nos da la transformada de la respuesta completa $L\{y(t)\}$ del sistema a la entrada $x(t)$.

Ejemplo 1. Obtener la salida a estado cero de un sistema cuya respuesta al impulso es $h(t) = e^{-t} u(t)$ si la entrada es $x(t) = t\,u(t)$.

Según (4)

$$Y(s) = X(s)\,H(s)$$

Por la tabla 1 tenemos

$$X(s) = L\{t\,u(t)\} = 1/s^2$$

y

$$H(s) = L\{e^{-t} u(t)\} = 1/(s+1)$$

Así

$$Y(s) = 1/(s^2(s+1)) = A/s^2 + B/s + C/(s+1)$$

Encontramos que $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, luego

$$Y(s) = 1/s^2 - 1/s + 1/(s+1),$$

por lo tanto

$$y(t) = (t - 1 + e^{-t})\, u(t)$$

Ejemplo 2 Encontrar la función de transferencia de la ecuación

$$d^2y(t)/dt^2 + 3\, dy(t)/dt - y(t) = x(t);\; dy(0)/dt = 0,\; y(0) = 0.$$

Tomando transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial:

$$s^2\, Y(s) - s\, y(0) - y'(0) + 3\,[s\, Y(s) - y(0)] - Y(s) = X(s)$$

Usando las condiciones iniciales

$$(s^2 + 3s - 1)\, Y(s) = X(s),$$

$$Y(s)/X(s) = 1/(s^2 + 3s - 1)$$

Al crear un modelo matemático de un sistema en la ingeniería es conveniente pensar que las variables que entran al sistema son señales y los elementos del sistema los medios por los cuales esas señales son modificadas. Sobre esta base cada uno de los elementos del sistema puede ser modelado por una función de transferencia. Una función de transferencia define una relación entre una señal de entrada y una señal de salida. La relación se define en términos de las transformadas de Laplace de las señales. La ventaja de esto es que las reglas que gobiernan la manipulación de funciones de transferencia son entonces de una naturaleza puramente algebraica.

Consideremos la Figura 17. Si,

$X(s) = L\{x(t)\}$ = Transf. de Laplace de la señal de entrada

$Y(s) = L\{y(t)\}$ = Transf. de Laplace de la señal de salida.

$H(s)$ = Función de transferencia

entonces

$$Y(s) = H(s)\,X(s)$$

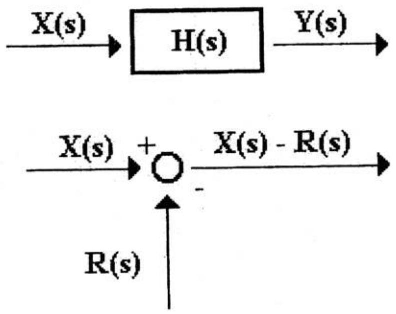


Figura 17

Las funciones de transferencia son representadas esquemáticamente por bloques rectangulares, mientras que las señales son representadas por flechas.

Frecuentemente al construir un modelo matemático de un sistema usando funciones de transferencia, es conveniente primero obtener funciones de transferencia de los elementos del sistema y entonces combinarlos. Examinaremos los bloques básicos que gobiernan la relación Y(s) = H(s) X(s). Consideremos sólo dos de estos bloques.

1. Combinación de dos funciones de transferencia en serie.

Consideremos la Figura 18 entonces

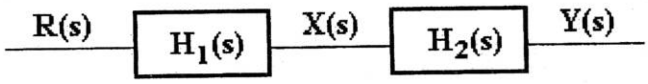


Figura 18

$$X(s) = H_1(s)\,R(s)\,,\quad Y(s) = H_2(s)\,X(s)$$

Eliminando X (s) entre estas ecuaciones obtenemos

$$Y(s) = H_1(s)\,H_2(s)\,R(s)$$

$$Y(s) / R(s) = H_1(s)\,H_2(s)$$

Por lo tanto, para dos funciones de transferencia en serie, la función de transferencia resultante es

$$H(s) = H_1(s)\, H_2(s)$$

2. Un caso de retroalimentación

Consideremos el diagrama mostrado en la Figura 19.

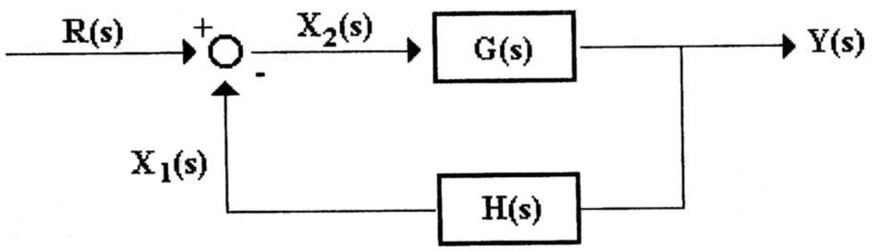


Figura 19

Deseamos obtener una función de transferencia que relaciones a R (s) y Y (s). Del diagrama vemos que:

$$Y(s) = G(s)\, X_2(s) \qquad (9)$$

$$X_1(s) = H(s)\, Y(s) \qquad (10)$$

$$X_2(s) = R(s) - X_1(s) \qquad (11)$$

Combinando las ecuaciones (10) y (11) hallamos que

$$X_2(s) = R(s) - H(s)\, Y(s) \qquad (12)$$

Combinando (9) y (12) encontramos que

$$Y(s) = G(s)\,[R(s) - H(s)\, Y(s)]$$

$$= G(s)\, R(s) - G(s)\, H(s)\, Y(s)\;;$$

$$Y(s)\,[1 + G(s)\, H(s)] = G(s)\, R(s)$$

$$Y(s) = G(s)\, R(s) \,/\, (1 + G(s)\, H(s))$$

Por lo tanto, la función de transferencia resultante en este caso es:

$$Y(s) / R(s) = G(s) / (1 + G(s) H(s))$$

Ejemplo 3

Un sistema está representado por las ecuaciones diferenciales

$$2x' - x = f(t)$$
$$y' + 3y = x(t)$$
$$z' + z = y(t)$$

La entrada inicial es $f(t)$ y la salida final es $z(t)$. Hallemos la función de transferencia resultante del sistema, suponiendo condiciones iniciales cero.

La función de transferencia para cada ecuación es encontrada y combinada en un diagrama de bloques (ver Figura 20)

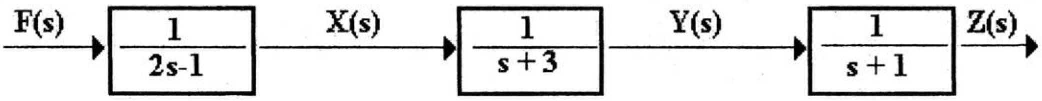


Figura 20

De acuerdo a lo visto anteriormente

$$H(s) = Z(s) / F(s) = 1 / ((2s - 1)(s + 3)(s + 1))$$

Ejemplo 4. Sistema de control de posición

Existen muchos ejemplos de sistemas de control de posición en ingeniería, por ejemplo, el control de la posición de un radio telescopio. El término común para estos sistemas es servo - sistemas.

Consideremos el diagrama de bloques de la Figura 21 el cual representa un servo - sistema simple.

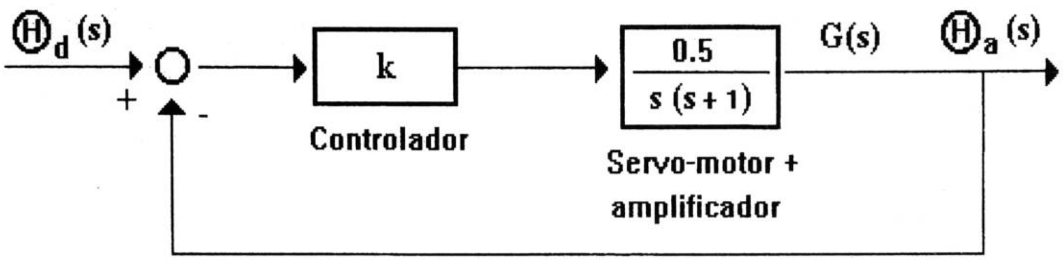


Figura 21

La posición actual del motor es denotada por $\Theta_a(s)$ en el dominio s y $\theta_a(t)$ en el dominio del tiempo. La posición deseada es denotada por Θ_d (s) y $\theta_d(s)$, respectivamente. El sistema es un lazo cerrrado con retroalimentación como el del punto (2) anterior. La diferencia entra la posición deseada y la actual genera una señal error la cual alimenta a un controlador con adelanto K. La señal que sale del controlador alimenta un servo - motor y está asociado con un amplificador. El propósito del sistema de control es mantener la posición actual del motor en un valor que corresponda a la posición deseada. En la práctica, si se desea una nueva posición, el sistema tomará algún tiempo para atender esta nueva posición. El ingeniero puede elegir un valor de la ganancia del controlador para obtener el mejor tipo de respuesta del sistema de control. Examinaremos el efecto de variar K sobre la respuesta del servo - sistema.

Podemos usar los casos (1) y (2) vistos anteriormente para obtener una función de transferencia resultante para el sistema. La función de transferencia G(s) es:

$$G(s) = 0.5\,K / (s\,(s + 1)) \quad \text{por el caso (1)}$$

La función de transferencia $\Theta_a(s) / \Theta_d(s)$ se obtiene por el caso (2) con $H(s) = 1$. Así,

$$\Theta_a(s) / \Theta_d(s) =$$
$$(0.5\,K / (s\,(s + 1))) / (1 + (0.5\,K) / (s\,(s + 1))) = 0.5K / (s^2 + s + 0.5K)$$

Ahora examinaremos el efecto de variar K. Consideraremos tres valores: K = 0.375, K = 0.5, K = 5 y examinemos la respuesta del sistema a una entrada escalón unitario en cada caso.

Para K = 0.375

$$\Theta_a(s) / \Theta_d(s) = 0.1875 / (s^2 + s + 0.1875)$$

Con $\Theta_d(s) = 1/s$, entonces:

$$\Theta_a(s) = 0.1875 / ((s^2 + s + 0.1875)\, s) = 1/s + 0.5 / (s + 0.75) - 1.5 / (s + 0.25)$$

Así,

$$\theta_a(t) = 1 + 0.5\, e^{-0.75\,t} - 1.5\, e^{-0.25\,t}, \quad t \geq 0.$$

Véase la Figura 22. Los ingenieros usualmente se refieren a esto como una respuesta sobre amortiguada. La respuesta no cruza el valor final.

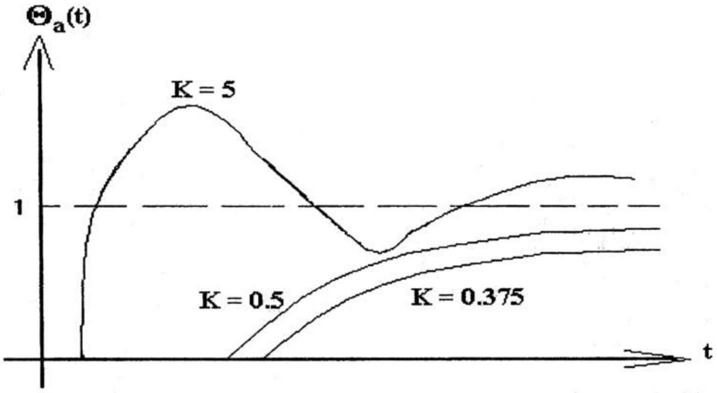


Figura 22

Para K = 0.5

$$\Theta_a(s) / \Theta_d(s) = 0.25 / (s^2 + s + 0.25)$$

$$\Theta_a(s) = 0.25 / (s\,(s^2 + s + 0.25)) = 1/s - 1/ (s + 0.5) - 0.5 / (s + 0.5)^2$$

$$\theta_a(t) = 1 - e^{-0.5\,t} - 0.5\, t\, e^{-0.5\,t}, \quad t \geq 0$$

Esto se muestra en la Figura 22 y se le llama respuesta críticamente amortiguada. Corresponde al ascenso más rápido en el tiempo del sistema sin cruzar el valor final.

Para K = 5

$$\Theta_a(s) / \Theta_d(s) = 2.5 / (s^2 + s + 2.5)$$

$$\Theta_a(s) = 2.5 / (s(s^2 + s + 2.5))$$

$$\Theta_a(s) = 1 / s - (s + 0.5) / ((s + 0.5)^2 + (1.5)^2) - 0.5 / ((s + 0.5)^2 + (1.5)^2) ;$$

$$\theta_a(t) = 1 - e^{-0.5t} \cos(1.5t) - (1/3)\, e^{-0.5t} \operatorname{sen}(1.5t)$$

ó

$$\theta_a(t) = 1 - 1.054\, e^{-0.5t} \operatorname{sen}(1.5t + 1.249), \quad t \geq 0$$

Véase la Figura 22. Esta respuesta se conoce como sub amortiguada.

Una de las cuestiones que con frecuencia se debe resolver al analizar un sistema es la referente a la estabilidad del sistema. Se dice que un sistema es estable si la salida está limitada cuando la entrada también lo está. La estabilidad es una característica del sistema y no depende de su entrada. En la formulación por variables de estado (ver sección 1.5) se determinó la estabilidad con base en el conocimiento de los valores propios de la matriz A del sistema. La estabilidad también se puede determinar en el dominio de la frecuencia s.

La mayoría de las funciones de transferencia para sistemas en ingeniería pueden ser escritos como funciones racionales, con un factor constante, K:

$$H(s) = K(P(s) / Q(s))$$

P (s) es de orden m, y Q (s) es de orden n; para un sistema físicamente realizable m < n. Por lo tanto, H (s) puede ser escrito como:

$$H(s) = (K(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)) / ((s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n))$$

Los valores de s para los cuales H (s) = 0 son conocidos como ceros de H (s), estos valores son: $s = z_1, z_2, \ldots, z_m$. Los valores de s para los Q (s) = 0, esto es, $s = p_1, p_2, \ldots, p_n$ se llaman polos de H (s). En general, los polos son números complejos. Los polos complejos siempre ocurren en pares complejos conjugados si el polinomio Q(s) tiene coeficientes reales.

Por ejemplo, en la función

$$H(s) = (3 (s - 3)(s + 2)) / ((s + 1)(s + 1 + 3i)(s + 1 - 3i))$$

s = 3 y s = -2 son ceros de H (s), mientras que s = -1, s = -1 – 3 i y s = -1 + 3 i son los polos de H (s). Analicemos ahora en qué forma los polos caracterizan las correspondientes respuestas.

Dado un sistema con función de transferencia, H (s), la señal de entrada, X (s), y la señal de salida, Y(s), entonces

$$H(s) = Y(s) / X(s),$$

esto es,

$$Y(s) = H(s) X(s)$$

y así

$$Y(s) = (K (s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)\ X(s)) / ((s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n))$$

Los polos y ceros del sistema son independientes de la entrada aplicada. El único efecto de X (s) a la expresión de Y (s) es aumentar (variar) el número de polos y ceros.

Consideremos el caso donde X (s) = 1/s, correspondiente a que la entrada es un escalón unitario.

$$Y(s) = (K (s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)) / ((s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)\, s)$$

$$= A_1 / (s - p_1) + A_2 / (s - p_2) + \ldots + A_n / (s - p_n) + B_1 / s$$

donde A_1, A_2, ... , A_n y B_1 son constantes. Tomando transformada inversa de Laplace obtenemos:

$$y(t) = A_1 e^{p1\,t} + A_2 e^{p2\,t} + \ldots + A_n e^{pn\,t} + B_1$$

Por ejemplo, si $p_1 = a + b\, i$, entonces

$$e^{p_1 t} = e^{at} e^{bti} = e^{at} (\cos (b t) + i \operatorname{sen} (b t))$$

Por lo tanto, la parte real, a, del polo da el ascenso de un término exponencial y la parte imaginaria, b, da el ascenso del término oscilatorio. Si $a < 0$ la expresión $e^{p_1 t}$ tiende a cero cuando $t \to \infty$. Por lo tanto, si el sistema es estable, entonces $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tendrán partes reales negativas y su contribución a $y(t)$ se anulará cuando $t \to \infty$.

La respuesta causada por el sistema de polos es llamada frecuentemente <u>respuesta transitoria</u> debido a que decrece con el tiempo para un sistema estable.

Es necesario decir unas palabras en el caso para el cual $\mathrm{Re}\,(p_k) = 0$. Los términos de esta forma representan polos complejos conjugados en el eje imaginario. En el desarrollo por fracciones parciales se tienen expresiones del tipo $c / (s^2 + \omega_o^2)$. La función del tiempo correspondiente es $(c / \omega_o) \operatorname{sen} (\omega_o t)$. En este caso no se presenta amortiguamiento exponencial y por lo tanto la respuesta no tiende a cero cuando t crece. A primera vista puede parecer que la respuesta en el tiempo no se incrementa cuando se incrementa t.
Sin embargo, si se excita el sistema con una función sinusoidal de la misma frecuencia ω_o, entonces se obtendrá un par de polos complejos conjugados y $Y(s)$ tiene un término de la forma $[1 / (s^2 + \omega_o^2)]^2$.

Este término da lugar a una respuesta en el tiempo

$$(1 / (2\, \omega_o^3)) (\operatorname{sen} (\omega_o t) - \omega_o t \cos (\omega_o t))$$

ó

$$((1 + \omega_o^2 t^2)^{1/2} / 2\, \omega_o^3) \cos (\omega_o t - \varnothing)$$

que crece ilimitadamente cuando t se incrementa. Físicamente se está excitando el sistema con una entrada justo a la frecuencia de resonancia. Estas mismas consideraciones se aplican al caso de un polo simple en el origen.

En resumen, un sistema con función de transferencia H(s) es estable si

1) Todos los polos de $H(s)$ están en el semiplano izquierdo de s.
2) El grado del denominador de $H(s)$ es mayor o igual al grado del numerador.

La última consideración tiene por objeto excluir términos tales como s^{m-n}. Si se empleara una entrada como sen (ωt) para excitar el sistema, entonces y (t) incluiría un término ω^{m-n} sen (ωt). Este término se podría hacer tan grande como se deseara incrementando la frecuencia de entrada ω.

Ejemplo 5. ¿Cómo afecta la ganancia K del amplificador a la estabilidad del sistema de la Figura 23?

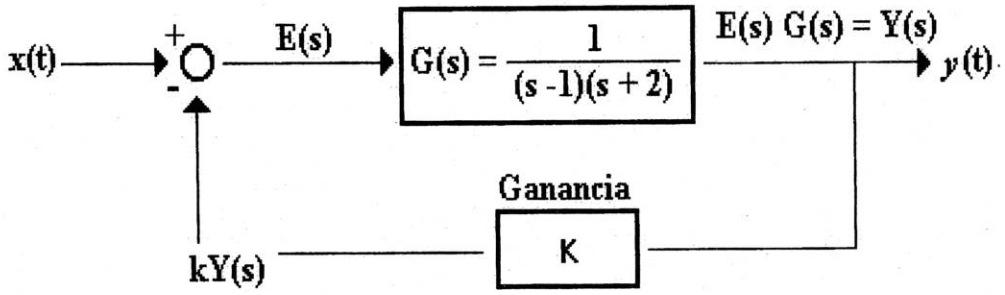


Figura 23

La función de transferencia completa del sistema es H (s) = Y (s) / X (s). La salida del amplificador (en el dominio s) es K Y(s), por lo que la entrada a la caja que contiene G(s) es

$$E(s) = X(s) - K\,Y(s)$$

Como hemos indicado anteriormente, la salida de la caja que contiene G(s) es

$$Y(s) = E(s)\,G(s)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} Y(s) &= E(s)\,G(s) \\ &= [X(s) - K\,Y(s)]\,G(s) \\ &= X(s)\,G(s) - K\,Y(s)\,G(s) \end{aligned}$$

Para obtener H (s) se forma la razón Y(s) / X (s). Así,

$$X(s)\,G(s) = Y(s) + K\,Y(s)\,G(s) = Y(s)\,[1 + K\,G(s)],$$

de donde

$$H(s) = Y(s)/X(s) = G(s)/(1 + K\,G(s))$$

La estabilidad de H (s) depende únicamente de sus polos, es decir, de los ceros de $1 + K\,G(s)$.

$$1 + K\,G(s) = 1 + K / ((s - 1)(s + 2)) = ((s - 1)(s + 2) + K) / ((s - 1)(s + 2))$$

De aquí se tiene que los polos están dados por la raíces de

$$(s - 1)(s + 2) + K = 0$$

ó

$$s^2 + s - 2 + K = 0$$

Las raíces son

$$s_{1,2} = -1/2 \pm ((1 - 4(-2 + K)) / 4)^{1/2} = -1/2 \pm (9/4 - K)^{1/2}$$

Las raíces s_1 y s_2 son reales para $K < 9/4$. Para $K > 9/4$, las raíces son complejas conjugadas. Para $K = 9/4$ existe una raíz doble en el eje real del plano s en Re (s) = -1/2. La Figura 24 muestra los lugares geométricos de las raíces en el plano s cuando la ganancia K varía. A medida que se incrementa la ganancia de este sistema retroalimentado se hace más estable un sistema inicialmente inestable. También se puede presentar el fenómeno inverso; o sea que al incrementar la ganancia se puede hacer que un sistema retroalimentado estable se convierta en inestable.

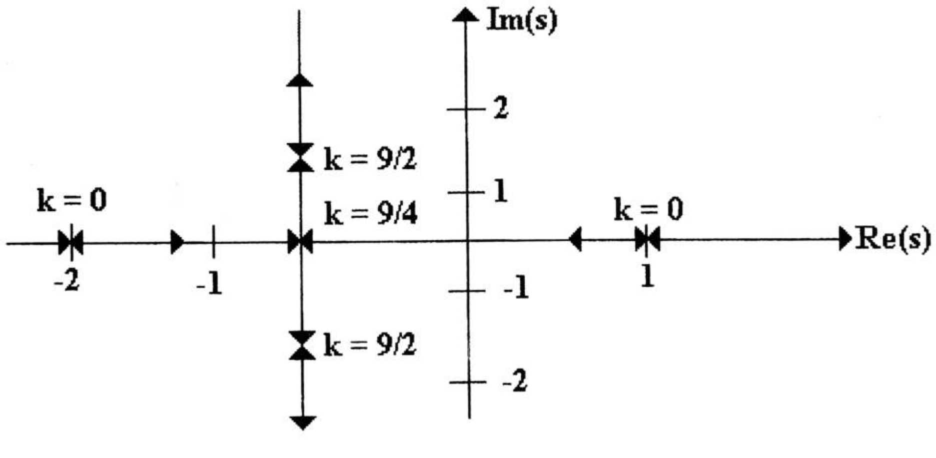


Figura 24

Para terminar este capítulo profundizaremos un poco más en la respuesta transitoria y de estado estable de un sistema lineal.

La respuesta total de un sistema a cualquier función de excitación está compuesta por una parte transitoria que es característica del sistema y una parte de estado estable que depende tanto del sistema como de la función de excitación. Estas ideas ya se vieron en el dominio del tiempo y también se pueden ilustrar en el dominio de la frecuencia.

Supóngase que se aplica $x(t)$ a un sistema cuya respuesta al impulso es $h(t)$. La salida $y(t)$ es

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

y en el dominio de la frecuencia

$$Y(s) = X(s)\,H(s)$$

Si la función de transferencia del sistema es

$$H(s) = N_1(s) / D_1(s) = N_1(s) / ((s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n))$$

y la transformada de la entrada es

$$X(s) = N_2(s) / D_2(s) = N_2(s) / ((s - q_1)(s - q_2)\ldots(s - q_m))$$

entonces

$$Y(s) = N_1(s)\,N_2(s) / ((s - p_1)\ldots(s - p_n)\,(s - q_1)\ldots(s - q_m))$$

$$= c_1 / (s - p_1) + \ldots + c_n / (s - p_n) + k_1 / (s - q_1) + \ldots + k_m / (s - q_m),$$

por fracciones parciales. Obteniendo la transformada inversa

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-p_i t} + \sum_{i=1}^{m} k_i e^{-q_i t} \qquad (13)$$

La sumatoria $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-p_i t}$ en (13) es la respuesta transitoria de $y(t)$. Obsérvese que estos términos se obtienen de las singularidades de $H(s)$. La respuesta transitoria es una combinación lineal de términos oscilando a las frecuencias naturales del sistema.

La sumatoria $\sum_{i=1}^{m} k_i e^{-q_i t}$ se denomina la parte de estado estable de la respuesta y (t). Estos términos se deben a las singularidades de X (s). En los sistemas estables, los términos de la primera suma tienden a cero cuando se incrementa t, mientras que la parte de estado estable puede contener términos que son distintos de cero indefinidamente. La respuesta h (t) al impulso se obtiene para un impulso de entrada que en el dominio de s representa una entrada X (s) = 1.

Las partes transitoria y de estado estable de y (t) corresponden a lo que en ecuaciones diferenciales se llama las soluciones homogénea y no homogénea, respectivamente, de la ecuación diferencial que describe al sistema.

Ejemplo 6. Se aplica un voltaje 10 cos (4t) u (t) a la red que se muestra en la Figura 25. ¿Cuál es el voltaje de salida $v_o(t)$?

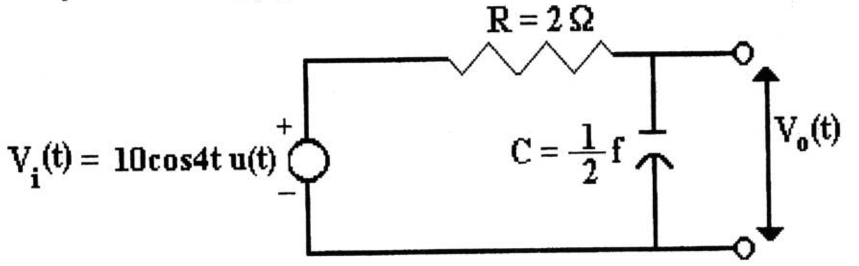


Figura 25

La función de transferencia del sistema H(s) está dada por

$$H(s) = V_o(s) / V_i(s) = (1/cs) / (R + (1/cs)) = 1 / (Rc\,s + 1) = 1 / (s + 1)$$

(ver aplicación 4, sección 2.3)

La transformada de Laplace de la señal de entrada es

$$V_i(s) = L\{10 \cos(4t)\, u(t)\} = 10\,s / (s^2 + 16)$$

Así, la transformada del voltaje de salida $V_o(t)$ es

$$V_o(s) = H(s)\, V_i(s) = 10\,s / ((s^2 + 16)(s + 1))$$

o, usando fracciones parciales

$$V_o(s) = (As + B) / (s^2 + 16) + c / (s + 1) \qquad (14)$$

Haciendo cálculos se encuentra que

$$V_o(s) = (10\,s/17 + 160/17) / (s^2 + 16) - (10/17)/(s + 1) \qquad (15)$$

El primer término del miembro derecho de (15) es el término de estado estable, y el segundo término es la componente transitoria. Tomando las transformadas inversas se obtiene

$$v_o(t) = L^{-1}\{V_o(s)\}$$

$$= L^{-1}\{(-10/17)/(s+1) + (10s/17)/(s^2+16) + (160/17)/(s^2+16)\}$$

$$= (-10/17)\,e^{-t} + (10/17)\cos(4t) + (40/17)\,\mathrm{sen}(4t), \qquad t > 0$$

Recordando lo visto en la aplicación 4 de la sección 2.3, podemos obtener directamente de la transformada de Fourier, la componente de estado estable

La salida de un sistema lineal invariable en el tiempo excitado por una sinusoide es también una sinusoide de la misma frecuencia pero con la fase y la amplitud modificadas. La manera en que se modifica la entrada está completamente especificada por la función de transferencia del sistema $H(j\omega)$. La respuesta de estado estable a una sinusoide con frecuencia angular ω tiene la magnitud $|H(j\omega)|$ y el cambio de fase de $\angle H(j\omega)$. En este caso,

$$H(j\omega) = 1/(1 + j\omega)$$

Para la frecuencia angular de $\omega = 4$,

$$H(j4) = 1/(1 + j4) = (1 - j4)/17$$

$$= ((1/17)^2 + (4/17)^2)^{1/2} \angle \mathrm{Arctan}(-4)$$

$$= 1/(17)^{1/2} \angle -76°$$

Por tanto, la respuesta de estado estable correspondiente a la entrada 10 cos 4t es

$$(10/(17)^{1/2}) \cos(4t - 76°) = (10/17)\cos(4t) + (40/17)\,\mathrm{sen}(4t)$$

que es idéntico a lo que se obtiene empleando la transformada de Laplace.

4. La Transformada - Z

4.1 Introducción

En los capítulos anteriores se trataron varios métodos de formulación de modelos para sistemas lineales y para el análisis de su comportamiento en la variable continua t. Ahora trabajaremos con la situación en la cual el parámetro independiente es una variable discreta.

Igual que en el caso continuo, se verá que si las señales de tiempo del sistema se transforman, es posible expresar relaciones en forma más sencilla. Seguirá siendo un hecho importante el que la operación convolución en el dominio del tiempo se convierta en una operación de multiplicación en el dominio de la transformada. Las transformadas de Laplace o Fourier se emplean en el dominio del tiempo continuo. La transformada - Z es la transformación apropiada para los sistemas de tiempo discreto.

La transformada - Z se conoce en la teoría de la probabilidad como la función generadora de momentos. Elegimos definir la transformada - Z en potencias negativas de z (en vez de potencias positivas) porque concuerda con varios libros de ingeniería que tratan el tema. La conversión entre las dos definiciones se logra con sólo sustituir Z^{-1} por Z.

4.2 La Transformada - Z

Definición. La transformada - Z de una función discreta $y_k = f(k)$; $k = 0,1,2, \ldots$ se representa por $Z\{f(k)\}$ ó $Z\{y_k\}$ o $F(Z)$ y se define como

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) Z^{-k},$$

donde Z se halla en una región del plano complejo llamada región de convergencia de F.

<u>Ejemplo 1</u>. La transformada - Z de la función $f(k) = a^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ es:

$$Z\{a^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k Z^{-k},$$

$$\infty$$

$$= \sum_{k=0} (a Z^{-1})^k = 1 / (1 - a Z^{-1}),$$

luego

$$Z\{a^k\} = Z / (Z - a),$$

siempre y cuando $| a Z^{-1} | < 1$, esto es, siempre y cuando $| Z | > | a |$. Además, si $| Z | \leq | a |$, la serie es divergente. Por lo tanto

$$Z\{a^k\} = \begin{cases} Z / (Z - a), & | Z | > | a | \\ \text{diverge}, & | Z | \leq | a |. \end{cases}$$

Ejemplo 2. La función discreta escalón unitario se representa por u (k) y se define como:

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & k = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

Hallemos $Z\{u_k\}$

Tenemos que

$$Z\{u_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) Z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Z^{-k} = 1 / (1 - Z^{-1}) = Z / (Z - 1),$$

si $| Z^{-1} | < 1$, esto es, $| Z | > 1$.

Ejemplo 3. La función impulso unitario se define por $\delta (k)$ y es:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Si $m \in N \cup \{0\}$ hallar $Z\{\delta(k - m)\}$

Tenemos que

$$Z\{\delta(k-m)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-m)\, Z^{-k} = Z^{-m}.$$

Si m = 0, $Z\{\delta(k)\} = Z^{-0} = 1$. Aquí la región de convergencia es C - {0}.

Ejemplo 4. Hallar $Z\{\text{sen}(k\,\omega_o T)\}$; k = 0, 1, 2, ...

Tenemos:

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\text{sen}(k\,\omega_o T))\, Z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} ((e^{ik\omega o T} - e^{-ik\omega o T}) / 2i)\, Z^{-k}$$

$$= (1/2i)\,[\sum_{k=0}^{\infty} (e^{i\omega o T} \bullet Z^{-1})^{k} - \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-i\omega o T} \bullet Z^{-1})^{k}]$$

$$= (1/2i)\,[1/(1 - e^{i\omega o T} \bullet Z^{-1}) - 1/(1 - e^{-i\omega o T} \bullet Z^{-1})]$$

(siempre y cuando $|e^{i\omega o T} \bullet Z^{-1}| < 1$, $|e^{-i\omega o T} \bullet Z^{-1}| < 1$, esto es, $|Z| > 1$)

$$= (1/2i)\,[Z/(Z - e^{i\omega o T}) - Z/(Z - e^{-i\omega o T})]$$

$$= (1/2i)\,(Z(e^{i\omega o T} - e^{-i\omega o T}) / (Z^2 - (e^{i\omega o T} + e^{-i\omega o T})Z + 1))$$

$$= (1/2i)\,((Z \bullet 2i \bullet \text{sen}(\omega o T)) / (Z^2 - 2Z\cos(\omega_o T) + 1))$$

$$= (Z\,\text{sen}(\omega_o T))/(Z^2 - 2Z\cos(\omega_o T) + 1).$$

La siguiente tabla contiene una lista de las funciones discretas más usuales y sus correspondientes transformadas.

Tabla 1. Pares de Transformada de - Z.

Función discreta: f (k)	Transformada - Z : F (Z)
1. 1	$Z / (Z - 1)$; $\lvert Z \rvert > 1$
2. a^k	$Z / (Z - a)$; $\lvert Z \rvert > \lvert a \rvert$
3. k	$Z / (Z - 1)^2$; $\lvert Z \rvert > 1$
4. k^2	$Z (Z + 1) / (Z - 1)^3$; $\lvert Z \rvert > 1$
5. k^3	$Z (Z^2 + 4Z + 1) / (Z - 1)^4$; $\lvert Z \rvert > 1$
6. $a^k / k!$	$\mathrm{Exp}\,[a / Z]$; $\lvert Z \rvert > 0$
7. sen ($k\omega T$)	$Z \,\mathrm{sen}\,(\omega T) / (Z^2 - 2Z \cos(\omega T) + 1)$; $\lvert Z \rvert > 1$
8. cos ($k\omega T$)	$Z (Z - \cos(k\omega T)) / (Z^2 - 2Z \cos(\omega T) + 1)$; $\lvert Z \rvert > 1$
9. a^k sen ($k\omega T$)	$a Z \,\mathrm{sen}\,(\omega T) / (Z^2 - 2 a Z \cos(\omega T) + a^2)$; $\lvert Z \rvert > \lvert a \rvert$
10. a^k cos ($k\omega T$)	$Z (Z - a \cos(\omega T))/(Z^2 - 2 a Z \cos(\omega T) + a^2)$; $\lvert Z \rvert > \lvert a$
11. $k a^k$	$a Z / (Z - a)^2$; $\lvert Z \rvert > \lvert a \rvert$
12. $k^2 a^k$	$a Z (Z + a) / (Z - a)^3$; $\lvert Z \rvert > \lvert a \rvert$
13. $k^3 a^k$	$a Z (Z^2 + 4 a Z + a^2) / (Z - a)^4$; $\lvert Z \rvert > \lvert a \rvert$
14. $\delta (k - m)$	Z^{-m} ; $\lvert Z \rvert > 0$
15. $\delta (k)$	1 ; $\lvert Z \rvert > 0$

4.3 Propiedades de la Transformada - Z

1. Linealidad. Si $f(k)$ y $g(k)$ están definidas para $k = 0, 1, 2, \ldots$ y a, b son constantes, entonces

$$Z\{a f(k) + b g(k)\} = a Z\{f(k)\} + b Z\{g(k)\},$$

en la intersección de las dos regiones de convergencia.

Ejemplo 5. Hallemos $Z\{f(k)\}$ y la región de convergencia en $f(k) = 4 \bullet 5^k + 2k$.

Por linealidad:

$$Z\{4 \bullet 5^k + 2k\} = 4 Z\{5^k\} + 2 Z\{k\}$$

$$= 4Z/(Z-5) + 2Z/(Z-1)^2$$

La región de convergencia es la intersección de $\{Z : |Z| > 5\}$ con $\{Z : |Z| > 1\}$, esto es, $\{Z : |Z| > 5\}$.

2. Multiplicación por a^k.

Sea $F(Z) = Z\{f(k)\}$. Entonces

$$Z\{a^k f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k) Z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)(a^{-1} Z)^{-k}$$

$$= F(a^{-1} Z).$$

Así que

$$Z\{a^k f(k)\} = F(Z/a)$$

Ejemplo 6. Determinar la transformada Z de $g(k) = 3^k \text{ sen } (k\omega T)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Como

$$Z\{\text{sen}(k\omega T)\} = F(Z) = Z \text{ sen}(\omega T) / (Z^2 - 2Z\cos(\omega T) + 1),$$

entonces

$$Z\{3^k \text{ sen}(k\omega T)\} = F(Z/3) = (Z/3) \text{ sen}(\omega T) / ((Z/3)^2 - 2(Z/3)\cos(\omega T) + 1)$$

$$= 3Z \text{ sen}(\omega T) / (Z^2 - 6Z\cos(\omega T) + 9)$$

3. Desplazamiento a la izquierda

Si $Z\{f(k)\} = F(Z)$, entonces para $m \in N$:

$$Z\{f(k+m)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+m) Z^{-k}$$

(con el cambio de variable $k + m = n$)

$$= \sum_{n=m}^{\infty} f(n) Z^{-(n-m)}$$

$$= Z^m \sum_{n=m}^{\infty} f(n) Z^{-n}$$

$$= Z^m \left[\sum_{n=0}^{\infty} f(n) Z^{-n} - \sum_{n=0}^{m-1} f(n) Z^{-n} \right]$$

Por lo tanto,

$$Z\{f(k+m)\} = Z^m F(Z) - f(0) Z^m - f(1) Z^{m-1} - f(2) Z^{m-2} - \ldots - f(m-1) Z.$$

4. Desplazamiento a la derecha

Si $Z\{f(k)\} = F(Z)$, entonces para $m \in N$:

$$Z\{f(k-m)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-m) Z^{-k}$$

(con el cambio de variable $n = k - m$)

$$= \sum_{n=-m}^{\infty} f(n) Z^{-n} \bullet Z^{-m}$$

$$= Z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) Z^{-n}$$

Es decir

$$Z\{f(k-m)\} = Z^{-m} F(Z)$$

Como veremos en el siguiente ejemplo, las propiedades (3) y (4) son particularmente útiles en la solución de ecuaciones en diferencias.

Ejemplo 7. Una ecuación del tipo

$$Y_{k+2} - 2Y_k + Y_{k-2} = k$$

se llama ecuación en diferencias, y juega dentro de modelos de variable discreta el mismo papel que las ecuaciones diferenciales juegan en modelos de variable continua. Aquí entendemos que $Y_{k+2} = Y(k+2)$ y $Y_{k-2} = Y(k-2)$.

Resolvamos la ecuación anterior por medio de la transformada - Z. Tenemos que

$$Z\{Y_{k+2} - 2Y_k + Y_{k-2}\} = Z\{k\}$$

$$Z\{Y_{k+2}\} - 2Z\{Y_k\} + Z\{Y_{k-2}\} = Z/(Z-1)^2$$

$$Z^2 F(Z) - Z^2 Y_o - Z Y_1 - 2F(Z) + Z^{-2} F(Z) = Z/(Z-1)^2,$$

donde $F(Z) = Z\{Y_k\}$

$$[Z^2 - 2 + Z^{-2}] F(Z) = Z/(Z-1)^2 + Y_o Z^2 + Y_1 Z$$

Por lo tanto,

$$F(Z) = Z/((Z^2 - 2 + Z^{-2})(Z-1)^2) + Y_o Z^2/(Z^2 - 2 + Z^{-2}) + Y_1 Z/(Z^2 - 2 + Z^{-2})$$

$$= Z^3/((Z+1)^2(Z-1)^4) + Y_o Z^4/((Z+1)^2(Z-1)^2) + Y_1 Z^3/((Z+1)^2(Z-1)^2)$$

El resto es calcular la transformada - Z inversa. Posponemos esto hasta el ejemplo 16, porque necesitamos algunas herramientas más.

5. Convolución

Definimos la convolución de f (k) y g (k) por

$$f(k) * g(k) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m)\, g(k-m)$$

Si $Z\{f(k)\} = F(Z)$ y $Z\{g(k)\} = G(Z)$, entonces

$$Z[f(k) * g(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} f(m)\, g(k-m) \right] Z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [f(0)\, g(k) + f(1)\, g(k-1) + f(2)\, g(k-2) + ...]\, Z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [f(0)\, g(k)\, Z^{-k} + f(1)\, g(k-1)\, Z^{-k} + f(2)\, g(k-2)\, Z^{-k} + ...]$$

$$= f(0) \sum_{k=0}^{\infty} g(k)\, Z^{-k} + f(1) \sum_{k=0}^{\infty} g(k-1)\, Z^{-k} + f(2) \sum_{k=0}^{\infty} g(k-2)\, Z^{-k}$$

$$+ ...$$

$$= f(0)\, G(Z) + f(1)\, Z\{g(k-1)\} + f(2)\, Z\{g(k-2)\} + ...$$

$$= f(0)\, G(Z) + f(1)\, Z^{-1} G(Z) + f(2)\, Z^{-2} G(Z) + ...$$

(por la propiedad 4)

$$= [f(0) + f(1)\, Z^{-1} + f(2)\, Z^{-2} + ...]\, G(Z)$$

$$= F(Z) \bullet G(Z)$$

6. Transformada de una sumatoria

Dada $f(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, generamos $g(k) = \sum_{i=0}^{k} f(i)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Si $F(Z) = Z\{f(k)\}$, hallemos $G(Z) = Z\{g(k)\}$.

Como $f(k) = g(k) - g(k-1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$(estamos considerando $g(-1) = 0$), entonces:

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} [g(k) - g(k-1)]\, Z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(k)\, Z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} g(k-1)\, Z^{-k}$$

$$= G(Z) - Z^{-1} G(Z),$$

por la propiedad 4. Así

$$G(Z) = F(Z) / (1 - Z^{-1}) = (Z / (Z-1))\, F(Z)$$

Ejemplo 8. Hallar $Z\{g(k)\}$, donde $g(k) = k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Definimos $f(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 1, & k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$

Tenemos que $g(k) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) = k$, luego

$$G(Z) = (Z / (Z-1))\, F(Z),$$

pero como $f(k) = U(k-1)$, entonces

$$F(Z) = Z^{-1} Z\{U_k\} = Z^{-1}\{Z / (Z-1)\} = 1 / (Z-1);$$

(véase el ejemplo 2), por lo tanto:

$$G(Z) = (Z / (Z-1)) \bullet (1 / (Z-1)) = Z / (Z-1)^2.$$

7. Teorema del valor inicial.

Supongamos que $F(Z) = Z\{f(k)\}$. Entonces

$$F(Z) = f(0) + Z^{-1} f(1) + Z^{-2} f(2) + \ldots \to f(0), \quad |Z| \to \infty$$

por lo tanto

$$f(0) = \lim_{|Z| \to \infty} F(Z).$$

8. Teorema del valor final.

Frecuentemente se está interesado en determinar el comportamiento de $f(k)$ cuando $k \to \infty$ directamente de su transformada $F(Z)$. Cuestiones de convergencia obligan a trabajar sólo en aquellos casos para los cuales $(Z - 1) F(Z)$ es analítica para $|Z| > 1$. En tales casos, tomando transformada - Z a $g(k) = f(k+1) - f(k)$:

$$Z[f(k+1) - f(k)] = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} [f(k+1) - f(k)] Z^{-k}$$

Por la propiedad (3)

$$Z F(Z) - Z f(0) - F(Z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} [f(k+1) - f(k)] Z^{-k}$$

Haciendo que $Z \to 1$:

$$\lim_{Z \to 1} (Z - 1) F(Z) - f(0) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} [f(k+1) - f(k)]$$

$$= \lim_{N \to \infty} [f(N+1) - f(0)]$$

$$= f(\infty) - f(0)$$

Por lo tanto,

$$f(\infty) = \lim_{Z \to 1} (Z - 1) F(Z).$$

Ejemplo 9. Determinar el valor final de $f(k)$ si

$$F(Z) = Z\{f(k)\} = Z / (Z - a), \quad |Z| > |a|.$$

A fin de utilizar la propiedad (8) se requiere que (Z - 1) F (Z) sea analítica en | Z | > 1. Esto implica que el teorema del valor final sólo es aplicable cuando | a | ≤ 1. Consideremos dos casos:

i) a = 1 :

$$f(\infty) = \lim_{Z \to 1} (Z - 1)\, Z / (Z - 1) = 1.$$

ii) | a | < 1 :

$$f(\infty) = \lim_{Z \to 1} (Z - 1)\, Z / (Z - a) = 0.$$

Nótese que $Z^{-1}\{F(Z)\} = a^k$.

9. División entre k + a, a = 0, 1, 2, ...

Tenemos, por definición que

$$Z\{f(k)/(k+a)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, Z^{-k}/(k+a)$$

$$= -Z^a \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, Z^{-k-a}/(-k-a)$$

$$= -Z^a \sum_{k=0}^{\infty} \int f(k) \bullet Z^{-k-a-1}\, dZ$$

$$= -Z^a \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(k) \bullet Z^{-k} \right) Z^{-a-1}\, dZ$$

$$= -Z^a \int F(Z) \bullet Z^{-a-1}\, dZ$$

esto es,

$$Z\{f(k)/(k+a)\} = -Z^a \int F(Z) \bullet Z^{-a-1}\, dZ$$

Ejemplo 10. Supóngase que se desea obtener una expresión de forma cerrada para la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X^{n+1} / (n+1).$$

Primero,

$$Z\{X^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n Z^{-n} = 1 / (1 - (X/Z)) = Z / (Z - X)$$

Así

$$Z\{X^{n+1}\} = X \sum_{n=0}^{\infty} X^n Z^{-n} = X Z / (Z - X).$$

Por la propiedad (9),

$$Z\{X^{n+1} / (n+1)\} = Z\{X (X^n / (n+1))\}$$

$$= - Z \int (X Z / (Z - X)) \bullet Z^{-2} \, dZ$$

$$= - Z \int X \, dZ / (Z^2 - X Z)$$

$$= - Z [- \int dZ / Z + \int dZ / (Z - X)]$$

$$= - Z [- \mathrm{Ln}\, Z + \mathrm{Ln}\, (Z - X)]$$

$$= Z \,\mathrm{Ln}\, (Z / (Z - X))$$

Por lo tanto, en vista de la propiedad (2) tenemos que

$$Z\{(-1)^n X^{n+1} / (n+1)\} = - Z \,\mathrm{Ln}\, (-Z / (-Z - X))$$

$$= Z \,\mathrm{Ln}\, ((X + Z) / Z)$$

Consideremos ahora

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n X^{n+1} / (n+1)$$

Según la propiedad 6

$$Z\{g_n\} = (Z / (Z-1)) \bullet Z \operatorname{Ln}((X+Z)/Z)$$

Como buscamos $\lim_{n\to\infty} g_n$, tenemos por la propiedad del valor final que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k X^{k+1} / (k+1) = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{Z\to 1} (Z-1) Z\{g_n\}$$

$$= \lim_{Z\to 1} (Z-1)(Z^2 / (Z-1)) \operatorname{Ln}((X+Z)/Z)$$

$$= \operatorname{Ln}(1+X).$$

10. Sucesiones periódicas

Se supone que $f(k+N) = f(k)$; $k = 0, 1, 2, \ldots,\ N \in \mathbb{N}$. Consideremos

$$F_1(Z) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) Z^{-k},$$

entonces

$$F(Z) = [f(0)Z^{-0} + f(1)Z^{-1} + \ldots + f(N-1)Z^{-(N-1)}]$$

$$+ [f(N)Z^{-N} + f(N+1)Z^{-(N+1)} + \ldots + f(2N-1)Z^{-(2N-1)}]$$

$$+ \ldots = F_1(Z) + Z^{-N} F_1(Z) + Z^{-2N} F_1(Z) + \ldots$$

$$= F_1(Z)[1 + Z^{-N} + Z^{-2N} + \ldots]$$

$$= F_1(Z) / (1 - Z^{-N});\quad |Z^{-N}| < 1,$$

luego

$$F(Z) = (Z^N / (Z^N - 1)) F_1(Z);\quad |Z| > 1.$$

Ejemplo 11 Determinar la transformada -Z de la sucesión periódica mostrada en la siguiente figura.

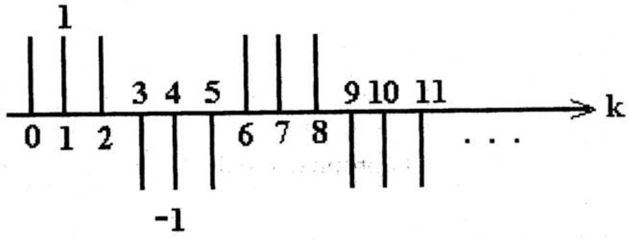


Figura 26

Notamos que N = 6. Tenemos que

$$F_1(Z) = \sum_{k=0}^{2} 1 \bullet Z^{-k} + \sum_{k=3}^{5} (-1) Z^{-k}$$

$$= 1 + Z^{-1} + Z^{-2} - Z^{-3} - Z^{-4} - Z^{-5}$$

$$= (Z^5 + Z^4 + Z^3 - Z^2 - Z - 1) / Z^5$$

Por lo tanto,

$$F(Z) = (Z^6 / (Z^6 - 1))(Z^5 + Z^4 + Z^3 - Z^2 - Z - 1) / Z^5$$

$$= Z(Z^3 - 1)(Z^2 + Z + 1) / ((Z^3 - 1)(Z^3 + 1))$$

$$= Z(Z^2 + Z + 1) / (Z^3 + 1), \quad |Z| > 1.$$

11. Propiedad de derivación

Si $F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) Z^{-k}$, entonces

$$F'(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} -k f(k) Z^{-k-1}$$

$$= -Z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [k f(k)] Z^{-k},$$

luego

$$Z[k f(k)] = -Z(dF(Z)/dZ)$$

Ejemplo 12. Hallar $Z[k^2]$

Por la propiedad anterior

$$Z[k^2] = Z[k \bullet k] = -Z\,(d/dZ)\,(Z/(Z-1)^2),$$

luego

$$Z[k^2] = Z(Z+1)/(Z-1)^3$$

4.4 Transformada - Z Inversa

Si se conoce la transformada -Z de una sucesión $\{x_k\}$, representada por $X(Z)$ y se desea obtener a la sucesión $\{x_k\}$, la solución viene dada al aplicar la transformada Z - inversa.

Básicamente hay tres métodos para hallar la transformada Z- inversa. Se supone que $X(Z)$ es de la forma $X(Z) = (a_o + a_1 Z + \ldots + a_m Z^m) / (b_o + b_1 Z + \ldots + b_n Z^n)$.

1. Método de división directa

Este método es muy elemental y sólo sirve para obtener los primeros términos de la sucesión $\{f(k)\}$. Se basa en la observación de que la transformada - Z es una serie de potencias de Z^{-1}.
Ejemplo 13. Determinar los primeros cuatro términos de la sucesión $\{f(k)\}$ para la cual

$$F(Z) = (Z^3 + 2Z^2 + Z + 1) / (Z^3 - Z^2 - 8Z + 12)$$

Dividiendo directamente:

$F(Z) = 1 + 3Z^{-1} + 12Z^{-2} + 25Z^{-3} + \ldots$, luego: $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 12$, $f(3) = 25, \ldots$

2. Inversión por integración compleja

Considérese

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k Z^{-k} \; ; \quad X_k = f(k)$$

para Z en la región de convergencia. sea C un contorno dentro de la región de convergencia y que encierre al origen. Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por Z^{n-1} e integrando a lo largo de C con respecto a Z hallamos

$$\int_C Z^{n-1} F(Z)\,dZ = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \int_C Z^{n-k-1}\,dZ$$

Como

$$\int_C Z^m\,dZ = \begin{cases} 2\pi i\,, & m=-1 \\ 0\,, & m \neq -1 \end{cases}$$

concluimos que

$$\int_C Z^{n-1} F(Z)\,dZ = X_n(2\pi i),$$

luego

$$X_k = f(k) = (1/2\pi i)\int_C Z^{k-1} F(Z)\,dZ$$

Ejemplo 14

$$Z^{-1}\{Z/(1-2Z)\}$$

Realicemos el cálculo usando dos métodos.

i) Por la tabla 1

$$Z^{-1}\{Z/(1-2Z)\} = Z^{-1}\{Z/(-2(Z-1/2))\}$$

$$= (-1/2)\,Z^{-1}\{Z/(Z-1/2)\}$$

$$= (-1/2)(1/2)^k \;;\; |Z| > 1/2$$

$$= -1/2^{k+1}$$

ii) Por integración compleja

$$Z^{-1}\{F(Z)\} = (1/2\pi i)\int_C (Z/(1-2Z))/(Z^{1-k})\,dZ$$

$$= (1/2\pi i)(-1/2) \int_C (Z \bullet Z^{k-1}) / (Z - 1/2)\, dZ$$

Por el teorema del residuo:

$$\operatorname*{Res}_{Z=1/2} [Z^k / (Z - 1/2)] = \lim_{Z \to 1/2} (Z - ½)(Z^k / (Z - ½))$$

$$= 1/2^k$$

Por tanto,

$$Z^{-1}\{F(Z)\} = (1/2\pi i)(-1/2)(2\pi i) \bullet (1/2^k) = -1/2^{k+1}$$

Nota. En conexión con el segundo método de solución del Ejemplo 14, el contorno C es una trayectoria cerrada que encierra todas las singularidades de $Z^{k-1} F(Z)$, usualmente se toma como un círculo centrado en el origen.

3. Fracciones parciales y el uso de tablas.

Este método tiene varios casos que analizamos a continuación. El siguiente ejemplo será de gran ayuda.

Ejemplo 15. Hallar $Z^{-1}\{Z^2 / (Z^2 - 3Z + 2)\}$

Por fracciones parciales

$$Z^2 / (Z^2 - 3Z + 2) = Z^2 / (Z - 2)(Z - 1) = A / (Z - 2) + B / (Z - 1)$$

Hallamos A = 4 y B = 1, luego

$$Z^{-1}\{Z^2 / (Z^2 - 3Z + 2)\} = 4 Z^{-1}\{1 / (Z - 2)\} - Z^{-1}\{1 / (Z - 1)\}$$

Observamos que la expresión anterior, obtenida con el método usual de fracciones parciales, no es útil para hallar la transformada inversa pues las formas obtenidas no están en tablas. Así que haremos una modificación, específicamente ponemos:

$$Z^2 / ((Z - 2)(Z - 1)) = A + B Z / (Z - 2) + C Z / (Z - 1)$$

Hallamos $A = 0, B = 2, C = -1$, por tanto:

$$Z^{-1}\{Z^2/(Z^2 - 3Z + 2)\} = 2Z^{-1}\{Z/(Z-2)\} - Z^{-1}\{Z/(Z-1)\}$$

$$= 2 \bullet 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

En el ejemplo anterior nos hemos visto en la necesidad de modificar el método de fracciones parciales. Profundicemos más ahora analizando los siguientes casos:

i. $F(Z) = (b_0 Z^m + b_1 Z^{m-1} + \dots + b_m) / (Z^n + a_1 Z^{n-1} + \dots + a_n)$,

donde todos los polos de F(Z) son distintos, esto es,

$$F(Z) = (b_0 Z^m + b_1 Z^{m-1} + \dots + b_m) / (Z - p_1)(Z - p_2)\dots(Z - p_n); \quad p_i \neq p_j, \; i \neq j$$

$(b_0 p_i^m + b_1 p_i^{m-1} + \dots + b_m \neq 0)$
Siguiendo la idea del problema anterior:

$$F(Z) = A_0 + A_1 Z/(Z - p_1) + A_2 Z/(Z - p_2) + \dots + A_n Z/(Z - p_n)$$

Si $Z = 0$: $F(0) = A_0$. Para hallar A_i, $i = 1, 2, \dots, n$; multiplicamos por $(Z - p_i)/Z$ y se encuentra que:

$$((Z - p_i)/Z)\; F(Z) = A_0 (Z - p_i)/Z + A_1 (Z - p_i)/(Z - p_1) + \dots + A_i + \dots +$$

$$+ A_n (Z - p_i)/(Z - p_n),$$

luego

$$A_i = ((Z - p_i)/Z)\; F(Z)\Big|_{Z = p_i} \quad ; \; i = 1, 2, \dots, n$$

Con estos coeficientes concluimos que:

$$f(k) = Z^{-1}\{F(Z)\} = A_0\,\delta(k) + A_1 p_1^k + A_2 p_2^k + \dots + A_n p_n^k; \; k = 0, 1, 2, \dots$$

(Desarrollo de Heaviside)

Ejemplo 16 Hallar $Z^{-1}\{2/(2Z^2 - 3Z + 1)\}$

Tenemos que

$$2/(2Z^2 - 3Z + 1) = 2/((2Z - 1)(Z - 1)) = 1/((Z - 1/2)(Z - 1))$$

Según lo desarrollado:

$$A_0 = 2/(2Z^2 - 3Z + 1)\Big|_{Z=0} = 2$$

$$A_1 = ((Z - ½)/Z)(1/((Z - 1/2)(Z - 1))\Big|_{Z=1/2} = -4$$

$$A_2 = ((Z - 1)/Z)(1/((Z - 1/2)(Z - 1))\Big|_{Z=1} = 2$$

Así que

$$2/(2Z^2 - 3Z + 1) = 2 - 4Z/(Z - 1/2) + 2Z/(Z - 1),$$

luego:

$$Z^{-1}\{2/(2Z^2 - 3Z + 1)\} = 2\,\delta(k) - 4\,(1/2)^k + 2\,(1)^k$$

$$= 2\,\delta(k) - 4 \bullet (1/2)^k + 2$$

<u>Ejemplo 17</u>. Determinar la transformada - Z inversa de la función

$$F(Z) = Z \operatorname{sen}(\omega T)/(Z^2 - (2\cos(\omega T))Z + 1), \quad |Z| > 1.$$

Reformulemos a F (Z):

$$F(Z) = Z \operatorname{sen}(\omega T)/((Z - e^{i\omega T})(Z - e^{-i\omega T}))$$

Hallamos que

$$A_0 = F(0) = 0$$

$$A_1 = ((Z - e^{i\omega T})/Z)\,F(Z)\Big|_{Z=e^{i\omega T}} = (\operatorname{sen}(\omega T))/(Z - e^{-i\omega T})\Big|_{Z=e^{i\omega T}}$$

$$= (\text{sen}(\omega T)) / (e^{i\,\omega T} - e^{-i\,\omega T}) = (\text{sen}(\omega T)) / (2i\,\text{sen}(\omega T));$$

$$A_1 = 1/2i.$$

$$A_2 = ((Z - e^{-i\,\omega T}) / Z)\, F(Z) \Big|_{Z = e^{-i\,\omega T}} = (\text{sen}(\omega T)) / (e^{-i\,\omega T} - e^{i\,\omega T}) = -1/2\,i$$

Concluimos que

$$f(k) = (1/2i)\,(e^{i\,\omega T})^k - (1/2i)\,(e^{-i\,\omega T})^k$$

$$= (e^{i\,k\,\omega T} - e^{-i\,k\,\omega T}) / 2i = \text{sen}(k\,\omega\,T); \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ii) Polos Múltiples

Supongamos que

$$F(Z) = (b_o Z^m + b_1 Z^{m-1} + \ldots + b_m) / ((Z - p_1)^{n1} (Z - p_2)^{n2} \ldots (Z - p_q)^{nq}),$$

donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$. Desarrollamos a $F(Z)$ en fracciones parciales de la forma

$$F(Z) = A_o + A_1 (Z / (Z - p_1)) + A_2 (Z^2 / (Z - p_1)^2) + \ldots + A_{n1} (Z^{n1} / (Z - p_1)^{n1})$$

$$+ B_1 (Z / (Z - p_2)) + B_2 (Z^2 / (Z - p_2)^2) + \ldots + B_{n2} (Z^{n2} / (Z - p_2)^{n2})$$

$$+ \ldots + C_1 (Z / (Z - p_q)) + C_2 (Z^2 / (Z - p_q)^2) + \ldots + C_{nq} (Z^{nq} / (Z - p_q)^{nq})$$

Puede verse que

$$Z^{-1} \{ Z^m / (Z - a)^m \} = \binom{k + m - 1}{m - 1} = a^k$$

con lo cual será posible hallar $f(k)$.

Ejemplo 18. Hallar Z^{-1} [F(Z)] , donde

$$F(Z) = (Z^3 + 2Z^2 + Z + 1) / (Z^3 - Z^2 - 8Z + 12).$$

En el denominador

$$Z^3 - Z^2 - 8 Z + 12 = (Z - 2)^2 (Z + 3),$$

entonces

$$F(Z) = A_o + A_1 (Z / (Z - 2)) + A_2 (Z^2 / (Z - 2)^2) + B_1 (Z / (Z + 3))$$

Desarrollando el álgebra (lo que no es tan rápido) encontramos que

$$A_o = 1/12 , A_1 = - 9/50 , A_2 = 19/20 , B_1 = 11/75 ,$$

esto es,

$$F(Z) = 1/12 - (9/50) (Z / (Z - 2)) + (19/20) (Z^2 / (Z - 2)^2) + (11/75) (Z / (Z + 3)) ,$$

y

$$f(k) = Z^{-1} [F (Z)] = (1/12) \delta (k) - (9/50) \bullet 2^k + (19/20) (k + 1) \bullet 2^k + (11/75) (-3)^k ,$$

ó

$$f(k) = (1/12) \delta (k) + (19/20) k \bullet 2^k + (77/100) \bullet 2^k + (11/ 75) (-3)^k ; k = 0, 1, 2, ...$$

Debe apreciarse que el aspecto molesto del procedimiento por expansión en fracciones parciales es la evaluación de los coeficientes en la expansión. Damos ahora un mecanismo por el cual facilitamos dicho trabajo.

Si

$$(*) \quad F(Z) = A_o + A_1 Z / (Z - p_1) + A_2 Z^2 / (Z - p_1)^2 + ... + A_{n1} Z^{n1} / (Z - p_1)^{n1}$$

$$+ B_1 Z / (Z - p_2) + B_2 Z^2 / (Z - p_2)^2 + ... + B_{n2} Z^{n2} / (Z - p_2)^{n2}$$

$$+ ... + C_1 Z / (Z - p_q) + ... + C n_q Z^{nq} / (Z - p_q)^{nq} ,$$

entonces

$$A_o = F(0)$$

El coeficiente asociado con el término de mayor orden del polo en $Z = p_1$ (es decir A_{n1}) se encuentra así:

Multiplicando cada lado de (*) por $((Z - p_1)/Z)^{n1}$ hallamos:

$$((Z - p_1)/Z)^{n1} F(Z) \Big|_{Z = p_1} = A_o ((Z - p_1)/Z)^{n1} \Big|_{Z = p_1} + A_1 ((Z - p1)/Z)^{n1-1} \Big|_{Z = p_1}$$

$$+ A_2 ((Z - p_1)/Z)^{n1-2} \Big|_{Z = p1} + \ldots + A_{n1} + B_1 (Z - p_1)^{n1} / ((Z - p_2) Z^{n1-1}) \Big|_{Z = p_1}$$

$$+ \ldots + C_{nq} (Z - p_1)^{n1} / ((Z - p_q)^{nq} Z^{n1-nq}) \Big|_{Z = p_1} = A_{n1},$$

luego

$$A_{n1} = ((Z - p_1)/Z)^{n1} F(Z) \Big|_{Z = p_1},$$

similarmente:

$$B_{n2} = ((Z - p_2)/Z)^{n2} F(Z) \Big|_{Z = p_2}, \ldots, C_{nq} = ((Z - p_q)/Z)^{nq} F(Z) \Big|_{Z = p_q}$$

De esta forma podemos hallar directamente los q + 1 coeficientes A_o, A_{n1}, B_{n2}, ... , C_{nq}. Los demás coeficientes pueden ser hallados evaluando (*) en tantos valores diferentes de Z como coeficientes incógnitas queden por encontrar, esto genera un sistema que deberá resolverse.

Ejemplo 19. Hallar $Z^{-1} [(Z^3 + 2Z^2 + Z + 1) / (Z^3 - Z^2 - 8Z + 12)]$

NOTA. El método descrito anteriormente es válido si en F (Z), grad (numerador) ≤ grad (denominador).

Tenemos que

$$(Z^3 + 2Z^2 + Z + 1) / (Z^3 - Z^2 - 8Z + 12) = (Z^3 + 2Z^2 + Z + 1)/((Z - 2)^2 (Z + 3))$$

$$= A_o + A_1 Z / (Z - 2) + A_2 Z^2 / (Z - 2)^2$$

$$+ B_1 Z / (Z + 3),$$

entonces

$$A_0 = F(0) = 1/12$$

$$A_2 = ((Z-2)/Z)^2 F(Z)\Big|_{Z=2} = (Z^3 + 2Z^2 + Z + 1)/(Z^2 (Z+3))\Big|_{Z=2} = 19/20$$

$$B_1 = ((Z+3)/Z)\, F(Z)\Big|_{Z=-3} = (Z^3 + 2Z^2 + Z + 1)/(Z (Z-2)^2)\Big|_{Z=-3} = 11/75$$

Para evaluar A_1, damos a Z cualquier otro valor, por ejemplo, si $Z = 1$:

$$5/4 = A_0 - A_1 + A_2 + B_1/4,$$

sustituyendo y despejando encontramos que $A_1 = -9/50$

Por lo tanto

$$f(k) = Z^{-1}\{1/12 - (9/50)(Z/(Z-2)) + (19/20)(Z/(Z-2))^2 + (11/75)(Z/(Z+3))\}$$

$$= (1/12)\,\delta(k) - (9/50) \bullet 2^k + (19/20)(k+1) \bullet 2^k + (11/75)(-3)^k$$

$$= (1/12)\,\delta(k) + (19/20)\,k \bullet 2^k + (77/100) \bullet 2^k + (11/75)(-3)^k;$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ Compárese con el ejemplo 18

Ejemplo 20 Hallar $Z^{-1}\{(Z+1)/(Z^2 (Z-1))\}$ (caso especial de un polo múltiple en $Z = 0$)

Ponemos

$$F(Z) = A_0 + A_1/Z + A_2/Z^2 + B_1 Z/(Z-1),$$

en $Z = 0$ trabajamos fracciones parciales de manera usual. Tenemos que $A_0 = F(0)$: indeterminado, luego la técnica anterior no es válida. Sin embargo, aplicando la misma técnica de fracciones parciales del cálculo integral hallamos :$A_0 = A_1 = -2$, $A_2 = -1$ y $B_1 = 2$. Así que

$$f(k) = Z^{-1}\{-2 - 2/Z - 1/Z^2 + 2Z/(Z-1)\}$$

$$= -2\,\delta(k) - 2\,\delta(k-1) - \delta(k-2) + 2\,; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

pues $Z\{\delta(k-m)\} = Z^{-m}$, $m \in N \cup \{0\}$. De manera más explícita

$$f(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 0, & k = 1 \\ 1, & k = 2 \\ 2, & k = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

En conclusión, al trabajar con polos en $Z = 0$, el método de fracciones parciales del cálculo integral no cambia.

Finalmente, ya teniendo todo este trabajo, resulta muy fácil resolver ecuaciones en diferencias.

Ejemplo 21 Resolver

$$y_{k+1} - \varepsilon^{-1} y_k = (1 - \varepsilon^{-1})(-1)^k, \quad y(0) = 0, \quad \varepsilon = \text{Cte.}$$

Sol. Aplicando transformada - Z

$$Z\,F(Z) - Z\,y(0) - \varepsilon^{-1} F(Z) = (1 - \varepsilon^{-1})(Z/(Z+1))$$

Poniendo $y(0) = 0$ y resolviendo para $F(Z)$ hallamos que

$$F(Z) = (1 - \varepsilon^{-1})(Z/((Z+1)(Z - \varepsilon^{-1})))$$

Desarrollando en fracciones parciales según lo expuesto:

$$F(Z) = (1 - \varepsilon^{-1})\,[A_0 + A_1 (Z/(Z+1)) + A_2 (Z/(Z - \varepsilon^{-1}))]\,,$$

con

$$A_0 = F(0) = 0$$

$$A_1 = ((Z+1)/Z)(Z/((Z+1)(Z-\varepsilon^{-1})))\Big|_{Z=-1} = 1/(-1-\varepsilon^{-1})$$

$$A_2 = ((Z-\varepsilon^{-1})/Z)(Z/((Z+1)(Z-\varepsilon^{-1})))\Big|_{Z=\varepsilon^{-1}} = 1/(\varepsilon^{-1}+1)$$

Por tanto

$$F(Z) = (1-\varepsilon^{-1})/(1+\varepsilon^{-1})[(Z/(Z-\varepsilon^{-1})) - (Z/(Z+1))],$$

luego

$$y_k = Z^{-1}[F(Z)] = (1-\varepsilon^{-1})/(1+\varepsilon^{-1})[\varepsilon^{-k} - (-1)^k]; \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo 22 Resolver

$$\begin{cases} x_{k+1} = 2x_k + y_k \; ; \; x(0) = 2 \\ y_{k+1} = x_k + 2y_k + 2^k \; ; \; y(0) = 0 \end{cases}$$

Sol. Tomemos transformada - Z en cada ecuación. Obtenemos

$$Z X(Z) - Z x(0) = 2X(Z) + Y(Z)$$

$$Z Y(Z) - Z y(0) = X(Z) + 2Y(Z) + Z/(Z-2)$$

Sustituyendo las condiciones y agrupando:

$$(Z-2)X(Z) - Y(Z) = 2Z$$

$$X(Z) + (2-Z)Y(Z) = -Z/(Z-2).$$

Hallamos $X(Z)$ y $Y(Z)$ por regla de Cramer:

$$\Delta = -Z^2 + 4Z - 3$$

$$\Delta X = 4Z - 2Z^2 - Z/(Z-2)$$

$$\Delta Y = -3Z$$

Entonces

$$X(Z) = \Delta X / \Delta = (2Z^3 - 8Z^2 + 9Z) / ((Z-2)(Z-3)(Z-1))$$

y

$$Y(Z) = \Delta Y / \Delta = 3Z / ((Z-3)(Z-1))$$

Usando fracciones parciales:

$$X(Z) = A_0 + A_1 (Z/(Z-2)) + A_2 (Z/(Z-3)) + A_3 (Z/(Z-1))$$

Usamos las fórmulas para encontrar:

$$A_0 = 0,\ A_1 = -1,\ A_2 = 3/2,\ A_3 = 3/2,$$

por lo cual

$$X_k = Z^{-1}[X(Z)] = -Z^{-1}[Z/(Z-2)] + (3/2)Z^{-1}[Z/(Z-3)] + (3/2)Z^{-1}[Z/(Z-1)];$$

$$X_k = (-1) \bullet 2^k + (3/2) \bullet 3^k + (3/2)(1)^k$$

$$= -2^k + (1/2)(3)^{k+1} + 3/2.$$

También

$$Y(Z) = A_0 + A_1 Z/(Z-3) + A_2 Z/(Z-1),$$

con $A_0 = 0$, $A_1 = 3/2$, $A_2 = -3/2$. Por lo tanto

$$Y_k = (3/2)Z^{-1}(Z/(Z-3)) - (3/2)Z^{-1}(Z/(Z-1))$$

$$= (3/2) \bullet 3^k - (3/2)(1)^k = (1/2) \bullet (3)^{k+1} - 3/2$$

Ejemplo 23 (Aplicación a circuitos eléctricos)

En el sistema representado en la Figura 27, el punto P_0 se mantiene a un potencial constante V_0 con relación a tierra. ¿Cuál es el potencial en cada uno de los puntos P_1, P_2, ... ?

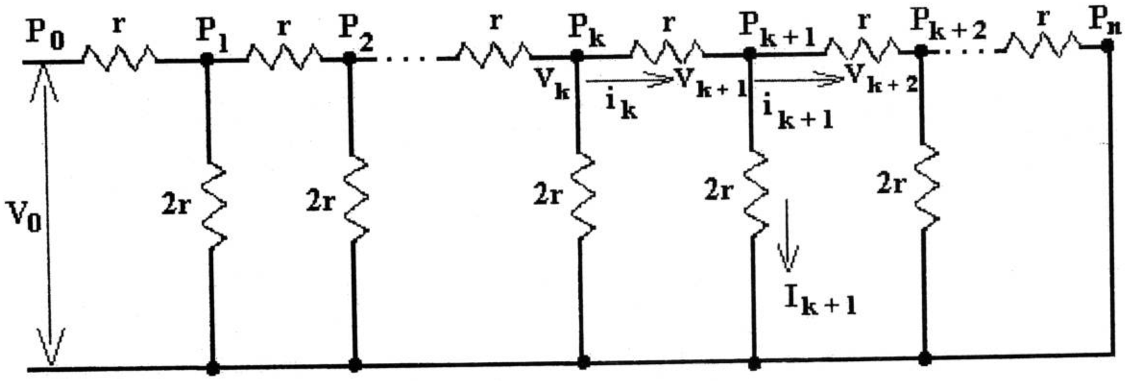


Figura 27

Sol. Según la primera ley de Kirchhoff, la suma de las corrientes que fluyen hacia cualquier unión de una red es igual a la suma de las corrientes que salen de tal unión. Luego, en un punto general P_{k+1}, tenemos:

$$i_k = i_{k+1} + I_{k+1}$$

o, reemplazando cada intensidad por su expresión equivalente dada por la ley de Ohm, $I = E / R$,

$$(V_k - V_{k+1}) / r = ((V_{k+1} - V_{k+2}) / r) + V_{k+1} / 2r ,$$

ó

$$2 V_k - 2 V_{k+1} = 2 V_{k+1} - 2 V_{k+1} - 2 V_{k+2} + V_{k+1} ;$$

$$V_{k+2} - (5/2) V_{k+1} + V_k = 0 \ldots \text{(A)}$$

Esta ecuación es válida para $k = 2, \ldots , n - 2$, es decir, para todos los puntos excepto P_1 y P_{n-1}, en los cuales (A) se reduce a las condiciones respectivas

$$V_2 - (5/2) V_1 + V_o = 0 \ldots \text{(B) (se da } V_o\text{)}$$

y

$$(-5/2) V_{n-1} + V_{n-2} = 0 \ldots \text{(C) (ya que } V_n = 0\text{)}$$

Las ecuaciones (A), (B) y (C) constituyen un sistema de (n - 1) ecuaciones algebraicas lineales a partir de las cuales pueden encontrarse los potenciales desconocidos V_1, V_2, ... ,

V_{n-1} por medio de pasos completamente elementales, aunque muy tediosos, para cualquier valor particular n. Sin embargo, es mucho más sencillo considerar la ecuación (A) como una ecuación en diferencias de segundo orden, sujeto a las condiciones (B) y (C), que servirán para determinar los valores de las constantes arbitrarias que aparecen en cualquier solución general de (A). Aquí es donde entra la transformada - Z como medio de solución de dicha ecuación.

Aplicamos transformada - Z en (A) para obtener

$$Z^2 F(Z) - V(0) Z^2 - V(1) Z - (5/2)[Z F(Z) - V(0) Z] + F(Z) = 0,$$

donde $F(Z) = Z[V_k]$. Poniendo $\alpha = V(0)$, $\beta = V(1)$ y factorizando a $F(Z)$ hallamos:

$$[Z^2 - (5/2) Z + 1] F(Z) = \alpha Z^2 - (5/2)\alpha Z + \beta Z;$$

$$F(Z) = ((Z^2 - (5/2) Z) / (Z^2 - (5/2) Z + 1))\alpha + (Z / (Z^2 - (5/2) Z + 1))\beta$$

Ahora

$$(Z^2 - (5/2) Z) / (Z^2 - (5/2) Z + 1) = (Z^2 - (5/2) Z) / ((Z - 2)(Z - 1/2))$$

$$= A_0 + A_1 (Z / (Z - 2)) + A_2 (Z / (Z - 1/2)),$$

con

$$A_0 = (Z^2 - (5/2) Z) / ((Z - 2)(Z - 1/2)) \Big|_{Z=0} = 0$$

$$A_1 = ((Z - 2) / Z)(Z^2 - (5/2) Z) / ((Z - 2)(Z - 1/2)) \Big|_{Z=2} = -1/3$$

$$A_2 = ((Z - 1/2) / Z)(Z^2 - (5/2) Z) / ((Z - 2)(Z - 1/2)) \Big|_{Z=1/2} = 4/3$$

Además

$$Z / (Z^2 - (5/2) Z + 1) = Z / ((Z - 2)(Z - 1/2))$$

$$= B_0 + B_1 (Z / (Z - 2)) + B_2 (Z / (Z - 1/2),$$

con $B_o = 0$, $B_1 = 2/3$, $B_2 = -2/3$.

Por lo tanto:

$$V_k = Z^{-1}[F(Z)]$$

$$= [(-1/3) \bullet 2^k + (4/3) \bullet (1/2)^k]\,\alpha + [(2/3) \bullet 2^k - (2/3) \bullet (1/2)^k]\,\beta.$$

De aquí:

$$V_k = (1/3)(2\beta - \alpha)\,2^k + (2/3)(2\alpha - \beta)(1/2)^k \quad \ldots \quad (D)$$

Usamos las condiciones (B) y (C). Por (B)

$$(4/3)(2\beta - \alpha) + (2/3)(2\alpha - \beta)(1/4) - (5/2)\,[(2/3)(2\beta - \alpha) + (2/3)(2\alpha - \beta)(1/2)] = -V_o\,;$$

desarrollando y simplificando encontramos que $\alpha = V_o$. Por (C)

$$-(5/2)\,[(2^{n-1}/3)(2\beta - \alpha) + (2/3)(2\alpha - \beta) \bullet (1/2^{n-1})]$$

$$+ (1/3)(2\beta - \alpha)\,2^{n-2} + (2/3)(2\alpha - \beta) \bullet (1/2^{n-2}) = 0\,,$$

desarrollando y agrupando encontramos

$$(1/2^{n-1} - 2^{n+1})\,\beta = (1/2^{n-2} - 2^n)\,\alpha\,,$$

luego

$$\beta = ((1/2^{n-2} - 2^n)/(1/2^{n-1} - 2^{n+1}))\,\alpha$$

$$= ((2 - 2^{2n-1})/(1 - 2^{2n}))\,\alpha = ((2 - 2^{2n-1})/(1 - 2^{2n}))\,V_o$$

Sustituyendo α y β en (D) obtenemos:

$$V_k = (1/3)\,[((4 - 2^{2n})/(1 - 2^{2n}))\,V_o - V_o]\,2^k$$

$$+ (2/3)\,[2\,V_o + ((2^{2n-1} - 2)/(1 - 2^{2n}))\,V_o]\,(1/2)^k$$

Desarrollando y simplificando

$$V_k = V_o / (1 - 2^{2n}) [2^k - 2^{2n-k}]$$

$$(2^{2n-k} - 2^k)(V_o / (2^{2n} - 1))$$

Nótese que cuando $k = 0$, la expresión se reduce a V_o y se anula para $k = n$.

INDICE ALFABETICO

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Bronson (1976). Ecuaciones Diferenciales Modernas. Schaum-Mc Graw Hill

[2] J.W. Brown and R. V. Churchill (1993). Fourier Series and Boundary Value Problems. Mc Graw Hill

[3] A. Croft, R. Davison and M. Hargreaves (1992). Engineering Mathematics. Addison-Wesley

[4] C.H. Edwards y D.E. Penney (1986). Ecuaciones Diferenciales Elementales con Aplicaciones. Prentice Hall.

[5] R.A. Gabel y R.A. Roberts (1975). Señales y Sistemas Lineales. Limusa

[6] H.P. Hsu (1987). Análisis de Fourier. Addison-Wesley

[7] F.J. Jauffred y A. Moreno (1983). Técnicas Discretas en Ingeniería de Sistemas. Representaciones y Servicios de Ingeniería.

[8] W. Kaplan (1985). Matemáticas Avanzadas para Estudiantes de Ingeniería. Fondo Educativo Interamericano.

[9] B.P. Lathi (1967). Signals, Systems, and Communication. Wiley

[10] B.P. Lathi (1986). Sistemas de Comunicación. Mc Graw Hill

[11] K. Ogata (1987). Dinámica de Sistemas. Prentice Hall

[12] K. Ogata (1990). Ingeniería de Control Moderna. Prentice Hall

[13] P.V. O'Neil (1991). Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. CECSA

[14] A.V. Oppenheim y A.S. Willsky (1994). Señales y Sistemas. Prentice Hall

[15] D.E. Scott (1989). Introducción al Análisis de Circuitos. Mc Graw Hill

[16] F.G. Stremler (1982). Sistemas de Comunicación. Alfaomega

[17] G.P. Tolstov (1962). Fourier Series. Dover.

[18] C.R. Wylie (1982). Matemáticas Superiores para Ingeniería. Mc Graw Hill.

SEÑALES
Y SISTEMAS
LINEALES

Se terminó de imprimir
en el mes de enero del año 2004
en los talleres de la Sección
de Impresión y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

La edición estuvo a cargo
de la Sección de Producción
y Distribución Editoriales

Se imprimieron 60 ejemplares
más sobrantes para reposición.

SEÑALES Y SISTEMAS LINEALES

PRADO PEREZ

44950 $ 20.00

CBI

ISBN: 970-31-0258-1

978-97031-02587

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Division de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas
Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales

Ciencias